# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὑπὸ

Μ. Α. ΛΑΓΡΑΓΓΙΟΥ

Πρὸς χρῆσιν τῶν εἰς τὰ σχολεῖα διδασκομένων, καὶ τῶν γονέων οἵτινες μέλλουν νὰ διδάξουν τὰ τέκνα των τὴν καλὴν ἀγωγήν.

Καὶ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

Ὑπὸ

Μ. Φ. ΛΑΓΡΑΓΓΙΟΥ

Διὰ τὴν αὐτὴν χρῆσιν.

Μετάφρασις ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ

Ὑπὸ Δ. ΔΕΣΠΟΤΟΠΟΥΛΟΥ.

ΕΝ ΝΑΥΠΛΙΩι

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Ε. Α. ΔΙΕΥΘΥΝ. ΥΠΟ Κ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΟΥ.

Ἀριθ. 167 Ὁδὸς Βουλευτικοῦ.

Πωλεῖται παρὰ τῷ ἰδίῳ μεταφραστῇ Ὁδὸς Βουλευτ. Ἀριθ. 164

1834.

ΤΩι ΕΞΟΧΩΤΑΤΩι

ΣΤΡΑΤΗΓΩι ΜΕΛΕΙ

ΤΗΣ

Τ. Α. ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΚΥΡΙΩι

# ΕΪΔΕΚΩι

ΕΙΣ ΑΪΔΙΟΥ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ, ΤΗΝ ΒΙΒΛΟΝ ΤΑΥΤΗΝ ΤΑΠΕΙΝΩΣ ΑΝΑΤΙΘΗΣΙΝ

Ο ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΗΣ.

# Φίλοι Ἀναγνῶςαι!

Ἡ ἔλλειψις νέου καὶ μεθοδικοῦ μαθηματικοῦ συγγράμματος, μ' ἔκαμε πρὸ πολλοῦ νὰ συλλάβω τὸν σκοπὸν νὰ μεταφράσω ἕν τοιοῦτον ἐπωφελὲς εἰς τὸ ἔθνος σύγγραμμα. Ὡς τοιοῦτον ἐνεκρίθη τὸ Σύςημα τῆς Μαθηματικῆς τοῦ Κ. Φραγκαίρου παραδεδεγμένον εἰς πολλὰ τῆς Εὐρώπης παιδευτικὰ καταςήματα, καὶ εἰς μεγάλην ὑπόληψιν. Ἐνῷ κατεγινόμην εἰς τὴν σύναξιν τῶν συνδρομητῶν, μετὰ τὴν ὁποίαν ἔμελλον νὰ κάμω ἔναρξιν εἰς τὸ ἔργον, καὶ οἴκοθεν ὁρμώμενος, καὶ ἀπὸ πολλοὺς εἰδήμονας φίλους παρακινηθεὶς, ἀνέβαλα δ' ἄλλον ἁρμοδιώτερον καιρὸν τὴν τύπωσιν τῆς μεταφράσεως τοῦ ῥηθέντος συγγράμματος, καὶ ἐπεχείρησα νὰ ἐκδώσω ἄλλο ςοιχειωδέςερον, καὶ ἀνάλογον μὲ τὴν παροῦσαν τῶν διδασκομένων νέων μας κατάςασιν. Ὡς τοιοῦτον μ' ἐπρόβαλε νὰ μεταφράσω ὁ φιλόκαλος Κ. Α. Πολυζωΐδης, ὅςις μ' ἐδάνεισε καὶ τὸ πρωτότυπον, τὸ παρὸν σύγγραμμα.

Περιττὸν κρίνω ν' ἀναφέρω πάλιν ὅτι τὸ σύγγραμμα θέλει χρησιμεύσει κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον εἰς ὅλας τὰς κλάσεις, ἐπειδὴ περὶ τούτου ἐῤῥέθησαν ἱκανὰ εἰς τὴν τῆς τυπώσεώς του εἰδοποίησιν.

Καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καθὼς καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν, μετεχειρίσθην ὕφος εὔληπτον ἀναγκαῖον εἰς τὰ ςοιχειώδη διδακτικὰ βιβλία, καὶ ἀνέπτυξα καὶ ὅλα τὰ μέρη τοῦ συγγραφέως, τὰ ὁποῖα ἠδύναντο νὰ προξενήσουν εἰς τοὺς πρωτοπείρους δυσκολίας.

Πρὸς κατάληψιν τῆς Γεωμετρίας ἀπαιτεῖτο μικρὰ θεωρία περὶ δυνάμεων καὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· ἡ θεωρία

αὕτη ἔπρεπε νὰ λάβῃ τόπον εἰς τὴν Ἀριθμητικήν. ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη ἀποβλέπει ὄχι μόνον τοὺς διδασκομένους νέους, ἀλλὰ καὶ τὰς λοιπὰς κλάσεις, τὴν ἐπρόσθεσα εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς Γεωμετρίας ὡς χρήσιμον οὖσαν εἰς τοὺς διδαχθησομένους αὐτήν.

Παρευρεσκόμην καθ' ὅλον τὸ διάστημα τῆς τυπώσεως τοῦ βιβλίου καὶ διώρθονα ὁ ἴδιος τρὶς καὶ τετράκις τὸ κείμενον πρὸς ἀποφυγὴν τῶν σφαλμάτων· ἀλλά, κατὰ τὸν εἰπόντα, « χαλεπὸν οὕτω τι ποιῆσαι, ὥστε μηδὲν ἁμαρτεῖν« Παρακαλῶ λοιπὸν διὰ τοῦτο τοὺς ἀναγνώστας νὰ διορθόνουν ὅσα εὑρίσκουσι θεωροῦντες εἰς τὸν πίνακα τῶν ἡμαρτημένων.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου ἐπροσέθησαν καὶ τὰ ἀναγκαῖα Σχήματα τὰ χαραχθέντα μετὰ πολλῆς ἐπιτηδειότητος παρὰ τοῦ Κ. Ἀνδρέου Φόρστερ Γραμματέως τῆς Υ. Ἀντιβασιλείας, καὶ διευθυντοῦ τῆς Βασιλικῆς Λιθογραφίας.

Ἰδοὺ ἐν συντόμῳ, φίλοι Ἀναγνῶσται, ὅσα ἀποβλέπουν τὰ εἰς τὸ ἀνὰ χεῖράς σας βιβλίον περιεχόμενα. Εἴθε νὰ ὠφεληθῆτε ἐκ τῶν κόπων μου! Εἴθε νὰ ἀνεγερθῇ μεταξὺ τῶν πεπαιδευμένων ὁμογενῶν Ἀνδρῶν ἡ καλὴ ἅμιλλα διὰ νὰ φωτίσουν τὸ ἔθνος μεταφράζοντες ὅλα τὰ ἀναγκαῖα τῶν σοφῶν τῆς Εὐρώπης συγγράμματα.

Ἔρρωσθε

Ὁ Ἐκδότης

## Πίναξ τῶν περιεχομένων.

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ.



### Περὶ Ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν.



### Γεωμετρία.

## Τῶν Ἡμαρτημένων Διόρθωσις.

Σελ. 9, στ 19, γρ. 5 ἀντὶ 7. — Σελ. 20, στ. 30, γρ. πολλούς. Σελ. 42, στ. 13, γρ. 1 ἀντὶ 6. — Σελ. 51, στ. 11, γρ. τὴν. — Σελ. 55, στ. 8, γρ. 25. — Σελ. 55, στ. 25, γρ. 30 ἀντὶ 20. — Σελ. 57, στ. 6, γρ. X. — Σελίδ. 64, στ. 16, γρ. εἰς. — Σελ. 64, στ. 28, γρ. -ματικῶς. — Σελ. 68, στ. 12, γρ. λεπτῶν. — Σελ. 78, στ. 2, γρ. πρός. — Σελ. 88, στ. 18, γρ. ἐπειδή. — Σελ. 90, στ. 12, γρ. γραμμήν. — Σελ. 93, στ. 33, γρ. ΑΓΒ. — Σελ. 98, στ. 19, γρ. γωνίαι. — Σελ. 100, στ. 13, γρ. εὐθεῖαι. — Σελ. 104, στ. 6, γρ. ἀκτίνων. - στ. 8, γρ. ἀδύνατον. - στ. 15, γρ. ὁ εἷς εἶναι ἐκτός. — Σελ. 107, στ. 31, γρ. τετραγώνου. — Σελ. 118, στ. 16, γρ τρίγωνα. — Σελ. 110, στ. 10, γρ. τήν. — Σελ 127, στ. 5, γρ. § 25. - στ. 14, γρ. παράλληλοι. — Σελ. 131, στ. 11, μετὰ τὴν λέξιν Πλάγιον γρ. (σχ. 62). — Σελ. 141, στ. 9, γρ. εἰς ταύτην τὴν κίνησιν, ἀπέχει. — Σελ. 143, στ. 13, γρ. Α καὶ Δ. - στ. 16, γρ. ΑΔ. — Σελ. 154, στ. 3, γρ. διά τινος. — Σελ. 165, στ. 31, γρ. (σελ. 110),

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

## ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§ 1. Ἡ Ἀριθμητικὴ εἶναι τὸ μέρος τῶν Μαθηματικῶν τὸ ὁποῖον ἰδίως πραγματεύεται περὶ ἀριθμῶν, καὶ τὸ ὁποῖον μᾶς διδάσκει πῶς νὰ ἐκτελῶμεν ἐπ' αὐτῶν διαφόρους ἐργασίας.

Ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἕνωσις πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων, ἢ πολλῶν μερῶν διακεκριμένων ἴσων μεταξύ των. Ἓν μόνον τούτων τῶν πραγμάτων, ἢ τῶν μερῶν τούτων λαμβανόμενον χωριστὰ, ὀνομάζεται μονάς. Μονὰς λοιπὸν εἶναι ἡ ἔκφρασις ἑνὸς μόνου πράγματος, καὶ Ἀριθμὸς, ἡ ἔκφρασις πολλῶν μονάδων, ἢ πραγμάτων ὁμοίων.

Ἡ ἰδία μονὰς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος ἐκ πολλῶν μερῶν ἴσων, τῶν ὁποίων ἡ ἕνωσις ἀποτελεῖ ταύτην τὴν μονάδα· τὰ μικρὰ ταῦτα μέρη ὀνομάζονται κλάσματα. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι κλασματικὸς ὅταν ἐκφράζῃ πόσα κλάσματα τῆς μονάδος ὑπάρχουν· οὕτω δύο τρίτα εἶναι ἀριθμὸς κλασματικός. Ὅταν δ' ἐξ ἐναντίας ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν περιέχῃ παρὰ μονάδας, ὀνομάζεται ἀριθμὸς ὁλοσχερής.

§ 2. Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζονται διὰ δέκα χαρακτήρων ἢ ψηφίων, τὰ ὁποῖα γράφονται καὶ ὀνομάζονται οὕτω·

| 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μηδὲν, | ἓν, | δύο, | τρία, | τέσ. | πέντε, | ἓξ, | ἑπτὰ, | ὀκτὼ, | ἐννέα. |

Τὸ μηδὲν δὲν ἔχει ἀφ' ἑαυτοῦ καμμίαν τιμὴν, χρησιμεύει δὲ μόνον εἰς τὸ ν' αὐξάνῃ τὴν τιμὴν τῶν σημαντικῶν ψηφίων μετὰ τὰ ὁποῖα τίθεται, ἢ νὰ διατηρῇ τὴν τιμὴν αὐτῶν.

§ 3. Οἱ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν κατὰ δύο διαφόρους σχέσεις· εἶναι ἀφῃρημένοι, ὅταν, ἐνῷ τοὺς ἀπαγγέλλωμεν, δὲ προσδιορίζωμεν τὴν φύσιν τῶν μονάδων τὰς ὁποίας παριςάνουν οὕτω 4, 6, 8, εἶναι ἀριθμοὶ ἀφῃρημένοι· εἶναι δὲ συγκεκριμένοι ὅταν ἡ φύσις τῶν μονάδων ἦναι προσδιωρισμένη· 3 μέτρα 4 δραχμαὶ, εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι.

Ἀριθμὸς ἀμιγὴς εἶναι ὅςις δὲν περιέχει παρὰ μονάδας το ἰδίου εἴδους, ὡς 3 μέτρα. Συμμιγὴς δὲ, ὅταν περιέχῃ κλάσματα τῆς πρώτης μονάδος τὴν ὁποίαν ἐκφράζει. Ὁ ἀριθμὸς 3 μέτρα, 34 ὑφεκατόμμετρα εἶναι συμμιγής.

## Ἡ Ἀρίθμησις.

§ 4. Ἡ τέχνη δὶ ἧς παριςάνομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς δι τῶν δέκα εἰρημένων χαρακτήρων ἢ ψηφίων, καὶ τοὺς ἐκφράζομ ὅταν δὶ αὐτῶν παριςάνωνται, ὀνομάζεται ἀρίθμησις.

Τὰ σημαντικὰ ψηφία ἔχουν δύο διακεκριμένας τιμὰς, τ μίαν ἀπόλυτον, ὅταν τὰ ψηφία ταῦτα ἀπαγγέλλωνται ἢ γρά φωνται χωριςὰ, καὶ τὴν ἄλλην σχετικὴν, ὅταν ἑνόνωνται μ ἄλλα σημαντικὰ ψηφία ἢ μὲ τὸ μηδὲν, τὰ ὁποῖα δίδουν ε αὐτὰ τιμὴν νέαν. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ςαθερὰ, ἡ δὲ σχετικ ἐξ ἐναντίας μεταβάλλεται κατὰ πολλοὺς διαφόρους τρόπους.

§ 5. Εὐκολώτατα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ν' ἀπαγγ λωμεν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ ἐσυμφωνήσαμεν τοὺς παριςάνωμεν μὲ τὰ 9 σημαντικὰ ψηφία, καὶ εἰς ἕκαςον ὁποίων ἐδώσαμεν ὄνομα ἰδιαίτερον· ὁ σχηματισμός των δὲ εἶ ἁπλούςατος, ἐπειδὴ ἀρκεῖ νὰ προσθέτωμεν εἰς τὸν ἑαυτόν τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον, ἢ τὴν μονάδα, διὰ νὰ λάβ τὸν ἀριθμὸν 2, καὶ προσθέτοντες διαδοχικῶς μίαν μονάδα εἰς ἀριθμὸν 2 καὶ εἰς ὅλους τοὺς ἀκολούθους, σχηματίζομεν οὕτω ἐννέα σημαντικὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων ἔπειτα καὶ διὰ μηδενικοῦ, σχηματίζομεν, καὶ μετὰ ταῦτα γράφομεν ὅλους γένει τοὺς ἀριθμούς.

Πρὸς ἔκφρασιν τῶν μεγαλητέρων τοῦ ἐννέα ἀριθμῶν, ἐ

γενικὴ τις ἀρχὴ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάσις ὅλης τῆς ἀριθμήσεως· καὶ ἀπεφασίσθη ὥςε ψηφίον τι κείμενον πρὸς τ' ἀριςερὰ ἄλλου νὰ χάνῃ τὴν ἀπόλυτόν του τιμὴν, καὶ νὰ λαμβάνῃ σχετικὴν δεκάκις μεγαλητέραν· κείμενον πρὸς τ' ἀριςερὰ δύο ἄλλων, νὰ λαμβάνῃ σχετικὴν τιμὴν ἑκατοντάκις μεγαλητέραν, καὶ χιλιάκις, κείμενον πρὸς τ' ἀριςερὰ τριῶν.

§ 6. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἤδη τὸν ἀριθμὸν τὸν μετὰ τὸν 9, θέτομεν μίαν μονάδα, καὶ πρὸς τὰ δεξιά της ἓν μηδενικὸν, ὡς 10, καὶ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν δέκα, ὅςις ἐκφράζει ὅτι ἡ μονὰς ἐλήφθη δεκάκις, καὶ παριςάνεται διὰ τῆς μονάδος ἥτις ἔλαβε τιμὴν δεκάκις μεγαλητέραν, ἐπειδὴ ἐτέθη ἔμπροσθεν ἑνὸς μηδενικοῦ. Ἐὰν προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν δέκα, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν ἕνδεκα, ὅςις γράφεται 11· εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ πρὸς τ' ἀριςερὰ μονὰς ἐκφράζει δέκα μονάδας ὁμοίας μὲ τὸν ἑαυτόν της, ἐνῷ ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ δὲν ἔχει παρὰ τὴν ἀπόλυτόν της τιμήν· προχωροῦντες οὕτω, γράφομεν δώδεκα μονάδας διὰ τοῦ σημείου 12· τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκριβὲς, ἐπειδὴ δώδεκα σύγκειται ἐκ δέκα μονάδων παριςανομένων διὰ τοῦ πρὸς τ' ἀριςερὰ 1, καὶ ἐκ δύο μονάδων παριςανομένων διὰ τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ 2. Ἐξακολουθοῦντες, καὶ θέτοντες διαδοχικῶς πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς μονάδος τὰ ἐννέα σημαντικὰ ψηφία, λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τοῦ ἕνδεκα μέχρι τοῦ δεκαεννέα. Διὰ νὰ λάβωμεν τὸν ἀκόλουθον ἀριθμὸν, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημαντικὰ ψηφία ἐτέθησαν διαδοχικῶς πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς μονάδος, ἀντεισάγομεν ἀντ' αὐτῆς τὸ ψηφίον 2, καὶ θέτοντες διαδοχικῶς πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ μηδενικὸν καὶ ὅλα τἄλλα ψηφία, σχηματίζομεν τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν ἐκ τοῦ εἴκοσι μέχρι τοῦ εἰκοσιεννέα ( 20 καὶ 29 ). Θέτομεν ἐνταῦθα ἀντὶ τοῦ ψηφίου 2, τὸ ὁποῖον ἔλαβε τιμὴν δεκαπλασίαν, τὸ ψηφίον 3, καὶ ἔχομεν τοὺς μεταξὺ τριάκοντα καὶ τριακονταεννέα ἀριθμοὺς ( 30 καὶ 39 ).

§ 7. Βλέπομεν λοιπὸν πραγματικῶς ὅτι εἰς πάντα ἀριθμὸν δύο ψηφίων, τὸ πρὸς τ' ἀριςερὰ ψηφίον ἐκφράζει πόσας δεκάδας ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει, καὶ τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ πόσας

μονάδες προσθέτονται εἰς ταύτας τὰς δεκάδας.

§ 8. Ἀφοῦ οὕτως ἐθέσαμεν εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων τ ἐννέα ψηφία τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸν ἀ ριθμὸν δεκάκις 10 δεκάδας, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ἑκατοντάδ μεταχειριζόμεθα τὴν ἰδίαν ἀρχὴν δηλ. θέτομεν μίαν μονάδα καὶ μετ' αὐτὴν δύο ἄλλα ψηφία, καὶ αὐξάνοντες κατὰ μονάδ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἔπειτα τὸ τῶν δεκάδων, ὅταν ἔχωμ ὑπὲρ τὰς 9 μονάδας, ἔπειτα τέλος διαδοχικῶς τὸ τῶν ἑκατον τάδων, ὅταν ἔχωμεν 10 δεκάδας, γράφομεν ὅλους τοὺς μετα ἑκατὸν καὶ ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα ἀριθμούς· φθάνοντες εἰ τὸν τελευταῖον τοῦτον ὅρον, ἐκλέγομεν νέαν μονάδα τὴν ὁποί ὀνομάζομεν χίλια, καὶ τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τῆς μονάδ μετὰ τὴν ὁποίαν θέτομεν τρία ἄλλα ψηφία, τὰ ὁποῖα ἔπειτ μεταβάλλομεν κατὰ τὰς ἰδίας ἀρχάς· μετὰ τὰς χιλιάδα σχηματίζομεν τὰς δεκάδας, ἔπειτα τὰς ἑκατοντάδας τῆς χιλι δος, ἔπειτα μίαν νέαν μονάδα ὀνομαζομένην ἑκατομμύριον, κ οὕτω καθεξῆς.

§ 9. Ὅθεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἀριθμοῦ τι ἐκφράζει τὰς μονάδας, τὸ δεύτερον τὰς δεκάδας, τὸ τρίτον τ ἑκατοντάδας, τὸ τέταρτον τὰς χιλιάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν λοιπὸν ἀρχίσωμεν ν' ἀριθμῶμεν ἀπὸ τὰ δεξιά, καὶ χω ρίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς τμήματα ἐκ τριῶν ψηφίων, θέλομ ἔχει πρὸς τ' ἀριστερὰ ἑκάστης ὑποστιγμῆς νέας μονάδας, τὰς ὁ ποίας ὀνομάζομεν μονάδας ἁπλᾶς, χιλιάδας, ἑκατομμύρια, δι κατομμύρια, τρισεκατομμύρια, κτλ., καὶ τὸ πρῶτον πρὸς τ ἀριστερὰ ψηφίον τῆς μονάδος, θέλει εἶναι δεκὰς τῆς ἰδίας αὐτ μονάδος, καθὼς τὸ δεύτερον ἑκατοντὰς αὐτῆς. Κατὰ τὰς ἀρχ ταύτας ἐσχηματίσαμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅπου ἐθέσαμ ἕνα ἀριθμὸν ὑπὸ τὰ ψηφία τοῦ ὁποίου ἐγράψαμεν τὴν σημα νουσαν αὐτὰ τάξιν.

| τμῆμα τῶν ...εκατομμυρίων | | | τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων | | | τμῆμα τῶν χιλιάδων | | | τμῆμα τῶν μονάδων | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6, | 7 | 2 | 4, | 6 | 2 | 6, | 5 | 8 | 3 |
| ἑκατοντάδες [illegible] | δεκάδες διςεκατομ. | διςεκατομμύρια. | ἑκατοντάδες ἑκατομ. | δεκάδες ἑκατομ. | ἑκατομμύρια. | ἑκατοντάδες χιλιάδ. | δεκάδες χιλιάδος. | χιλιάδες. | ἑκατοντάδες. | δεκάδες. | μονάδες. |

ΙΘ. Ἔςω ἤδη ν' ἀπαγγείλωμεν ἀριθμὸν ὁποιονδήποτε γε-
...μένον, πχ. τὸν 2,425,637. Διαιροῦμεν, ὡς εἰς τὸν
...γούμενον πίνακα, τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τμήματα ἐκ τριῶν
...ων ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ, χωρὶς νὰ φροντίζωμεν πόσα
...ει ἔχει τὸ τελευταῖον πρὸς ἀριςερὰ τμῆμα, τὸ ὁποῖον δύνα-
...νὰ περιέχῃ δύο ἢ καὶ ἓν μόνον. Παρατηροῦμεν ἔπειτα ὅτι
...ρῶτον τμῆμα εἶναι τῶν ἑκατομμυρίων, τὸ δεύτερον τὸ τῶν
...άδων, καὶ τὸ τρίτον τὸ τῶν μονάδων. Ὅθεν ἐκφράζομεν
...προτεθέντα ἀριθμὸν λέγοντες·

ἑπτὰ μονάδες, ἢ μᾶλλον δύο ἑκατομμύρια·

| | |
|---|---|
| τρεῖς δεκάδες, | τέσσαρες ἑκατοντάδες χιλιάδος· |
| ἓξ ἑκατοντάδες, | δύο δεκάδες χιλιάδος· |
| πέντε χιλιάδες, κτλ. | πέντε χιλιάδες, κτλ. |

...λλὰ διὰ τῆς εἰς τμήματα διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν, δυνά-
...νὰ συντομεύσωμεν πολὺ τὸν τρόπον τοῦτον· τῷόντι ἑπτὰ
...ες, τρεῖς δεκάδες καὶ ἓξ ἑκατοντάδες, ἰσοῦνται μὲ ἑξακο-
...τριάκοντα ἑπτὰ μονάδας· ἐπίσης τέσσαρες ἑκατοντάδες,
...κάδες καὶ πέντε μονάδες τῆς χιλιάδος, εἶναι τετρακόσιαι
...πέντε χιλιάδες· ἀπαγγέλλεται λοιπὸν ὁ ἄνω ἀριθμὸς, δύο
...μύρια, τετρακόσιαι εἰκοσιπέντε χιλιάδες, ἑξακόσιαι τριά-
...ἑπτὰ μονάδες. Ὅθεν διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν ἀριθμόν τινα,

ἀπαγγέλλομεν ἕκαςον τμῆμα ὡς ἂν ἦτο μόνον, θέτοντες εἰς ἕ-
καςον τὸ ὄνομα τὸ ὁποῖον αἱ μονάδες τοῦ τμήματος τούτου φέ-
ρουν.

§ 11. Διὰ νὰ γράψωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν τὸν ὁποῖο
ἀπαγγέλλομεν, ἀκολουθοῦμεν σχεδὸν τὴν αὐτὴν τάξιν· δηλ.
γράφομεν κατὰ πρῶτον τὰς ἑκατοντάδας, τὰς δεκάδας καὶ τὰ
μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, προβαίνοντες ἐξ ἀριςερῶν πρὸς τὰ
δεξιά· μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας κα
μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως νὰ φθά-
σωμεν εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας. Οὕτω, διὰ νὰ γράψωμεν τὸ
ἀριθμὸν τριακόσια τεσσαράκοντα καὶ ἓν δισεκατομμύρια, ἑξακό-
σια εἰκοσιπέντε ἑκατομμύρια, ὀκτακοσίας τριάκοντα δύο χιλιά-
δας, τετρακοσίας δεκατρεῖς μονάδας, γράφομεν κατὰ πρῶτο
341, ἔπειτα ἀμέσως 625, μετὰ ταῦτα 832, καὶ τέλος 413
καὶ οὕτως ἔχομεν 341,625,832,413· ἐγράψαμεν οὕτω τὰς ἑκα-
τοντάδας, τὰς δεκάδας, καὶ τὰς μονάδας τοῦ δισεκατομμυρίου
τοῦ ἑκατομμυρίου, τῆς χιλιάδος, καὶ τῶν ἁπλῶν μονάδων· ὅθε
ἐγράψαμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

§ 12. Ὅταν εἰς ὁποιονδήποτε τμῆμα δὲν ὑπάρχουν ἑκατοντά-
δες, ἢ δεκάδες, ἢ ἁπλαῖ μονάδες, πρέπει νὰ θέτωμεν ἓν μηδε-
νικὸν εἰς τὴν θέσιν τούτων τῶν ἑκατοντάδων. δεκάδων, ἢ μονά-
δων, διὰ νὰ διατηρήσῃ τὴν σχετικὴν καὶ μεταβλητὴν τιμὴν τῶ
πρὸ αὐτοῦ ψηφίων. Οὕτω διὰ νὰ γράψωμεν ἑπτακόσια ἑπτ
ἑκατομμύρια, εἴκοσι χιλιάδας, καὶ τέσσαρας μονάδας, βλέπομ
ἀμέσως ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν ἔχει δεκάδας ἑκατομμυρίου
ἑκατοντάδας καὶ μονάδας χιλιάδος, ἑκατοντάδας καὶ δεκάδ
ἁπλῶν μονάδων, καὶ ὅτι ἑπομένως πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὴ
ὁποίαν ἔπρεπε νὰ κρατοῦν θέσιν μηδενικά, εἰς τὸν ἀριθμὸν ὅς
γράφεται· 707,020,004.

## Περὶ Ὑπολογισμοῦ.

§ 13. Τέσσαρας ἀρχικὰς ἐργασίας δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσω
ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, τὴν Πρόσθεσιν, τὴν Ἀφαίρεσιν, τὸν Π

λαπλασιασμὸν καὶ τὴν Διαίρεσιν. Αἱ τέσσαρες αὗται ἐργασίαι ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, καὶ εἰς τοὺς κλασματικούς.

## Ὑπολογισμὸς τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν.

## Περὶ Προσθέσεως.

§ 14. Πρόσθεσις εἶναι ἡ ἐργασία δι' ἧς ἑνόνομεν πολλοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἕνα μόνον. Τὸ ἐξαγόμενον ἐκ τῆς ἐργασίας ὀνομάζεται Κεφάλαιον.

Ὅταν οἱ εἰς πρόσθεσιν δεδομένοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἓν μόνον ψηφίον, προσθέτομεν τὸ πρῶτον εἰς τὸ δεύτερον, εἰς δὲ τὸ κεφάλαιόν των τὸ τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου· διὰ νὰ προσθέσωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς, 4,8,7,9,5,3, λέγομεν, 4 καὶ 8 κάμουν 12, καὶ 7, 19, καὶ 9, 28, καὶ 5, 33, καὶ 3, 36, ὅςις εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν περιεχομένων ἁπλῶν μονάδων εἰς τὰ ἓξ ταῦτα ψηφία.

Ὅταν δὲ οἱ ἀριθμοὶ σύγκηνται ἐκ πολλῶν ψηφίων, ὡς οἱ 54,327 καὶ 2,651, ἰδοὺ πῶς ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν. Γράφομεν τὸν ἀριθμὸν 54,327, καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ τὸν 2,651, ὥςε αἱ μονάδες νὰ ἦναι ὑπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας, καὶ αἱ ἑκατοντάδες ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, κτλ. Γράφομεν ὡσαύτως ὑπὸ τὸν δεύτερον καὶ ἕτερον τρίτον, ἐὰν ἔχωμεν, καὶ ἀφοῦ οὕτω τοὺς διατάξωμεν, σύρομεν ὑπὸ τὸν τελευταῖον μίαν γραμμήν· ἀρχίζοντες ἔπειτα ἀπὸ τὰς μονάδας λέγομεν· 7 καὶ 1 κάμουν 8, θέτομεν 8 ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς ςήλης τῶν μονάδων· μεταβαίνοντες εἰς τὰς δεκάδας λέγομεν, 2 καὶ 5 κάμουν 7· γράφομεν 7 ὑπὸ τὴν ςήλην τῶν δεκάδων· προχωροῦντες ἔπειτα εἰς τὰς ἑκατοντάδας, σχηματίζομεν ἀπὸ τὰ 3 καὶ 6 ψηφία τῆς αὐτῆς ςήλης τὸν ἀριθμὸν 9, τὸν ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· ἀφοῦ τελειώσωμεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας, προσθέτομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὰς μονάδας καὶ δεκάδας τῆς χιλιάδος καὶ ἔχομεν τὸ κεφάλαιον 56,978 τῶν δύο ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{r} 54327 \\ 2651 \\ \hline 56978 \end{array}$$

§ 15. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἤδη τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς — 248,634, 335,412, 717,423, τοὺς καταςρώνομεν καθὼς εἴπαμεν ἀνωτέρω· ἔπειτα ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ καὶ προσθέτομεν τὰς μονάδας ἑκάςης ςήλης. Ἡ πρώτη ςήλη δίδει τὸν ἀριθμὸν 9, καὶ ἡ δευτέρα τὸν 6, τοὺς ὁποίους γράφομεν

| |
|---:|
| 248634 |
| 335412 |
| 717423 |
| 1301469 |

ὑπὸ τὰς ἀμοιβαίας των ςήλας· ἀλλ' ἡ τρίτη δίδει τὸν 14 ὅςις παριςάνει ἑκατοντάδας· ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ τεσσάρων ἑκατοντάδων, καὶ ἄλλων δέκα ἑκατοντάδων, αἵτινες κάμνουν μίαν χιλιάδα· γράφομεν λοιπὸν τὰς τέσσαρας ἑκατοντάδας ὑπὸ τὴν ςήλην των, φέρομεν τὰς 10 ἑκατοντάδας, ἤτοι μίαν μονάδα τῆς χιλιάδος εἰς τὴν ςήλην τῶν χιλιάδων, καὶ λέγομεν 8 καὶ 1 κάμνουν 9, καὶ 5,14, καὶ 7,21, ὅςις παριςάνει μίαν μονάδα τῆς χιλιάδος τὴν ὁποίαν θέτομεν, καὶ δύο δεκάδας χιλιάδος, τὰς ὁποίας φέρομεν εἰς τὴν ςήλην τῶν δεκάδων τῆς χιλιάδος, καὶ οὕτω λέγομεν πάλιν 4 καὶ 2 κάμνουν 6, καὶ 3,9, καὶ 1,10. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐδῶ κρατοῦμεν σωςὰ 10 δεκάδας τῆς χιλιάδος, ἢ μίαν ἑκατοντάδα τῆς χιλιάδος, τὴν φέρομεν ὁλόκληρον εἰς τὴν ςήλην τῶν ἑκατοντάδων, καὶ θέτομεν ὑπὸ τὴν ςήλην τῶν δεκάδων ἓν μηδενικὸν διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν μονάδες τούτου τοῦ εἴδους, καὶ διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν ἄλλων πρὸς τ' ἀριςερὰ ψηφίων. Ἐξακολουθοῦμεν, καὶ βλέπομεν ὅτι 2 καὶ 1 κάμνουν 3, καὶ 3,6, καὶ 7,13, ἤτοι 13 ἑκατοντάδας τῆς χιλιάδος, ἢ 3 ἑκατοντάδας χιλιάδος, καὶ μίαν μονάδα ἑκατομμυρίου· ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν μένει πλέον ςήλη ὅπου νὰ φέρωμεν τὴν μονάδα τοῦ ἑκατομμυρίου, τὴν γράφομεν πρὸς τ' ἀριςερὰ τοῦ ψηφίου 3, καὶ ἔχομεν τέλος τὸ κεφάλαιον 1,301,469 τῶν τριῶν ἀριθμῶν.

## Περὶ Ἀφαιρέσεως.

§ 16. Τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὅταν ἀφαιρῶμεν ἀριθμόν τινα ἀπ' ἄλλον, ὀνομάζεται κατάλοιπον, καὶ ἡ ἐργασία δι' ἧς λαμβάνομεν αὐτὸ, Ἀφαίρεσις· τὸ κατάλοιπον τοῦτο

ἐκφράζει πόσον ὁ εἷς ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸν ἄλλον, ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἡ ἐργασία δὲν ἔχει κάμμίαν δυσκολίαν ὅταν ζητῆται ν' ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἔχοντα ἓν ψηφίον, ἀπ' ἄλλον ἔχοντα ἐπίσης ἓν μόνον· οὕτω βλέπομεν ἀμέσως ὅτι μένουν 4, ἐὰν ἀπὸ 9 ἀφαιρέσωμεν 5.

§ 17. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν ἔχουν πολλὰ ψηφία, ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· γράφομεν τὸν μικρότερον τῶν δύο ἀριθμῶν ὑπὸ τὸν μεγαλήτερον, θέτοντες, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὰς μονάδας ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας ὑπὸ τὰς δεκάδας, κτλ. φέρομεν ἔπειτα μίαν γραμμὴν ὑπὸ κάτω, καὶ ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἕκαςον ψηφίον τοῦ κάτω ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸ ἀντίςιχόν του τοῦ ἄνω.

Ἔςω πχ. ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν 23453 ἀπὸ 67695. Καταςρόνομεν, ὡς εἴπομεν, τὴν ἐργασίαν καὶ λέγομεν· 3 ἀπὸ 7 μένουν 2· γράφομεν 2 ὑπὸ τὴν ςήλην τῶν μονάδων· 5 ἀπὸ 9 μένουν 4· θέτομεν 4 ὑπὸ τὴν ςήλην τῶν δεκάδων, καὶ οὕτω καθεξῆς διὰ τὰς ἑκατοντάδας, τὰς χιλιάδας, κτλ.

| |
|---:|
| 67695 |
| 23453 |
| 44242 |

§ 18. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ὅλα τὰ ψηφία τοῦ ἄνω ἀριθμοῦ ἦσαν μεγαλήτερα ἀπὸ τὰ τοῦ κάτω· ἀλλὰ συμβαίνει ὥςε τὸ ψηφίον τοῦ κάτω νὰ ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ τοῦ ἄνω, τοῦ ὁποίου δύναται νὰ ἦναι μάλιςα καὶ ἓν μηδενικόν. Ἔςω πχ. ν' ἀφαιρέσωμεν 27,654 ἀπὸ 180,948. Καταςρόνομεν τὴν ἐργασίαν ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, καὶ λέγομεν, ἐὰν ἀπὸ 8 ἀφαιρέσωμεν 4 μένουν 4· προχωροῦντες βλέπομεν ὅτι 5 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιροῦνται, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 5 μονάδας ἀπ' ἀριθμὸν περιέχοντα μόνον 4. Εἰς ταύτην τὴν περίςασιν δανειζόμεθα ἀπὸ τὸ 9 τῆς ςήλης τῶν ἑκατοντάδων μίαν μονάδα ἡ ὁποία, ἐκ τῶν ὅσων εἴδαμεν εἰς τὴν ἀρίθμησιν, ἔχει τιμὴν δεκάκις μεγαλητέραν τῶν ψηφίων τῆς ςήλης τοῦ 4, τὸ ὁποῖον εἶναι σαφές, ἐ-

| |
|---:|
| 180948 |
| 27654 |
| 153294 |

ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μία ἑκατοντὰς ἰσοδυναμοῦσα μὲ 10 δεκάδας. Ἑνόνοντες τὰς 10 ταύτας δεκάδας μὲ τὰς 4 τῆς δευτέρας ςήλης, ἔχομεν 14 δεκάδας ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν 5, καὶ ἔχομεν κατάλοιπον 9. Τὸ ψηφίον 9 τῶν ἑκατοντάδων μένει ἤδη 8, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν τὸ κάτω 6 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 2, τὸ ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὴν ςήλην τῶν ἑκατοντάδων. Ἐπειδὴ εἰς τὰς χιλιάδας τὸ ψηφίον τοῦ ἄνω ἀριθμοῦ εἶναι 0, ἀπὸ τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 7, δανειζόμεθα ἀκόμη ἀπὸ τὴν ςήλην τῶν δεκάδων τῆς χιλιάδος μίαν μονάδα, ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 μονάδας τῆς χιλιάδος, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν 7 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 3· ἐξακολουθοῦμεν ἔπειτα καὶ λέγομεν, 2 ἀπὸ 7, ἐπειδὴ ἐδανείσθημεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ 8, μένουν 5, τέλος, ἐπειδὴ ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας τῆς χιλιάδος τοῦ ἄνω ἀριθμοῦ δὲν ἔχομεν τίποτε ν' ἀφαιρέσωμεν, κατεβάζομεν τὴν μονάδα ταύτης τῆς τάξεως, καὶ ἔχομεν κατάλοιπον 153,294.

§ 19. Ὅταν τὸ ψηφίον ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ δανεισθῶμεν ἦναι ἤδη πολλὰ μικρὸν, ἢ κεῖται πρὸ αὐτοῦ ἓν ἢ πολλὰ μηδενικὰ, τότε λύομεν τὴν δυσκολίαν ταύτην κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Ζητεῖται π. χ. ν' ἀφαιρέσωμεν 3,682,546 ἀπὸ 20,000,122. Κατασρώνομεν τὴν ἐργασίαν, καὶ λέγομεν· ἐπειδὴ 6 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ 2, δανειζόμεθα μίαν δεκάδα ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 μονάδας, προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὰς 2 αἵτινες ὑπάρχουν ἤδη εἰς τὴν ςήλην τῶν μονάδων, καὶ ἔχομεν 12 μονάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας εὐκόλως ἀφαιροῦμεν 6, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 6, τὸ ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὴν ςήλην τῶν μονάδων. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν 2 δεκάδων ἐδανείσθημεν τὴν 1, καὶ δὲν δυνάμεθα ἐκ μόνης τῆς 1 ν' ἀφαιρέσωμεν 4, δανειζόμεθα μίαν ἑκατοντάδα, ἤτοι 10 δεκάδας, τὰς προσθέτομεν εἰς τὴν 1 καὶ ἔχομεν 11, ἐκ τῶν ὁποίων ἀφαιροῦμεν 4 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 7. Τὸ ψηφίον 1 τῶν ἑκατοντάδων δὲν ὑπάρχει, ἐπειδὴ τὸ ἐδανείσθημεν, ὅθεν εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ ἦτον εἰς τὴν θέσιν του ἓν μηδενικόν· δανειζόμεθα ἀκόμη ἀπὸ τὸ 2 μίαν μονάδα, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ

```
 20,000,122
  3,382,546
 ----------
 16,325,576
```

μὲ 10, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν 5 καὶ ἔχομεν κατάλοιπον 5· ἀφαιροῦμεν ἔπειτα 2 ἀπὸ 7, καὶ λαμβάνομεν 5· ἀλλὰ 8 ἀπὸ τὸ μηδὲν δὲν ἀφαιρεῖται· καὶ δὲν εἰμποροῦμεν ἐν ταὐτῷ νὰ δανεισθῶμεν ἀπὸ τὸ προηγούμενον ψηφίον, ἐπειδὴ καὶ αὐτὸ εἶναι μηδὲν καὶ πρὸ αὐτοῦ ἀκόμη ἄλλο μηδέν. Εἰς ταύτην τὴν περίςασιν δανειζόμεθα ἀπὸ τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον 2, τὸ ὁποῖον παριςάνει δεκάδας ἑκατομμυρίων, μίαν μονάδα, ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 ἑκατομμύρια· ἀφίνομεν 9 εἰς τὴν τάξιν τῶν μονάδων τῶν ἑκατομμυρίων τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ μηδέν, καὶ μένει μία μονὰς ἑκατομμυρίου, ἤτοι δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδος, ἐκ τῶν ὁποίων ἀφίνομεν 9 ἐπὶ τοῦ μηδενικοῦ τὸ ὁποῖον κατέχει τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τῆς χιλιάδος, καὶ κρατοῦμεν μίαν ἑκατοντάδα χιλιάδος, ἤτοι 10 δεκάδας χιλιάδος. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ μονὰς τὴν ὁποίαν ἐδανείσθημεν ἀπὸ τὰς δεκάδας τῶν ἑκατομμυρίων, ἀνελύθη εἰς 9 ἑκατομμύρια, 9 ἑκατοντάδας χιλιάδος, 1 ἑκατοντάδα ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 δεκάδας χιλιάδος, καὶ ὅτι ἐπομένως τὰ πρῶτα ψηφία τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 20,008,122 δύνανται νὰ γραφῶσι 19,9(10)8122.

Ἀφοῦ ἐγράψαμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸν πρῶτον ἀριθμόν, εὐκόλως ἤδη δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν· ὅθεν λέγομεν, 8 ἀπὸ 10 μένουν 2· 6 ἀπὸ 9, 3· 3 ἀπὸ 9, 6, κτλ.

Τὸ πᾶν συνίςαται, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν ὁποῖον πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἔχῃ πολλὰ μηδενικά, νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον κατὰ μίαν μονάδα, καὶ ν' ἀντικαταςήσωμεν εἰς τὴν θέσιν ἑκάςου μηδενικοῦ 9, ἐκτὸς τοῦ τελευταίου, ἀντὶ τοῦ ὁποίου θέτομεν 10.

## Περὶ τῆς Δοκιμῆς τῆς Προσθέσεως καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως.

§ 20. Μ' ὅσην προσοχὴν καὶ ἂν ἐκτελῶμεν ἀριθμητικήν τινὰ ἐργασίαν, ἐνδέχεται μολοντοῦτο νὰ σφάλωμεν, καὶ ἐπομένως πρέπει διά τινος ἀντιςρόφου ἐργασίας νὰ βεβαιωθῶμεν ἐὰν ἡ προκειμένη ἐκτελέσθη ἀκριβῶς. Ἡ ἐργασία αὕτη ὀνομάζεται Δοκιμή.

Διὰ τῆς ἀφαιρέσεως δοκιμάζομεν τὴν πρόσθεσιν· διὰ νὰ δοκιμάσωμεν π. χ. τὴν ἄντικρυ πρόσθεσιν, ἀρχίζομεν ἀπὸ τ' ἀριστερὰ καὶ λαμβάνομεν τὸ κεφάλαιον 20 τῶν ψηφίων τῆς στήλης τῶν ἑκατοντάδων, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὰς 21 ἑκατοντάδας τοῦ ὅλου κεφαλαίου, καὶ ἔχομεν μίαν ἑκατοντάδα, ἤτοι 10 δεκάδας, αἵτινες ἑνούμεναι μὲ τὰς δύο δεκάδας τοῦ ὅλου, δίδουν 12 δεκάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν τὸ κεφάλαιον 11 τῆς στήλης τῶν δεκάδων, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον μίαν δεκάδα, ἤτοι 10 μονάδας· προσθέτοντες εἰς αὐτὰς τὰς 2 μονάδας τοῦ κεφαλαίου, ἔχομεν 12, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ κεφάλαιον 12 τῶν ψηφίων τῆς στήλης τῶν μονάδων, λαμβάνομεν κατάλοιπον μηδέν. Ἡ ἐργασία λοιπὸν εἶναι ἀκριβής· διότι, ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ ὅλον κεφάλαιον ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ὅλα τὰ μερικὰ κεφάλαια ἐκ τῶν ὁποίων αὐτὸ σύγκειται, δὲν πρέπει νὰ μείνῃ τίποτε.

```
   547
   633
   942
 ------
 2,122
    11
```

§ 21. Ἡ ἀφαίρεσις ἐξ ἐναντίας δοκιμάζεται διὰ τῆς προσθέσεως. Τῳόντι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ ἑνὸς μικροτέρου ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς μεγαλητέρου· ἐὰν λοιπὸν τὴν διαφορὰν ταύτην τὴν προσθέσωμεν εἰς τὸν μικρότερον, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μεγαλήτερον. Ὅθεν διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως, προσθέτομεν τὸ κατάλοιπον εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμόν, καὶ ἐὰν ἡ πρώτη ἐργασία ἔγεινεν ἀκριβής, πρέπει νὰ προκύψῃ ὁ μεγαλήτερος.

```
 545623
 328954 }
 ------ } 545623
 216674 }
```

## Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

§ 22. Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12 κατ' ἐξακολούθησιν 8 φορὰς εἰς τὸν ἑαυτόν του, δυνάμεθα εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως νὰ εὕρωμεν τὸ ὅλον. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι 12 νὰ προστεθῇ 8 φορὰς κατ' ἐξακολούθησιν δίδει 96, καὶ ὅτι 96 σύγκειται ἐκ τοῦ ὀκταπλασίου τῆς 1 δεκάδος, ἢ ἐκ τοῦ 80, καὶ ἐκ τοῦ ὀκταπλασίου τῶν 2 μονάδων, ἢ ἐκ τοῦ 16· ἐπομένως δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν πολὺ τὴν πρόσθεσιν λαμβάνοντες 8 φορὰς τὰς

μονάδας, καὶ 8 φορὰς τὰς δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 12. Ἡ σύντομος αὕτη πρόσθεσις ὀνομάζεται Πολλαπλασιασμός. Ὁ ἀριθμὸς 12 τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν ὀκτάκις, ὀνομάζεται πολλαπλασιαςέος· καὶ ὁ 8 ὅςις ἐκφράζει ποσάκις λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαςέος, εἶναι ὁ πολλαπλασιαςής· 96 εἶναι τὸ γινόμενον. Οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 8 ὀνομάζονται ἀκόμη καὶ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι τόσον πλέον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, καθόσον οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι μεγαλήτεροι ἢ μικρότεροι.

§ 23. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἐζητεῖτο νὰ λάβωμεν 12 μέτρα ὀκτάκις, ἢ 8 μήκη ἴσα μὲ 12 μέτρα, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ 8 ταῦτα μήκη λαμβανόμενα ὁμοῦ ἤθελαν δώσει γινόμενον 96 μέτρα· ἐὰν ἀντὶ μέτρων εἴχαμεν ὀργυιάς, ἠθέλαμεν λάβει εἰς τὸ γινόμενον 96 ὀργυιάς. Ὅθεν τὸ γινόμενον συμφωνεῖ πάντοτε μὲ τὸν πολλαπλασιαςέον, ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς ἀριθμὸς ἀφῃρημένος (3), ἐκφράζων μόνον ποσάκις ὁ πολλαπλασιαςέος λαμβάνεται.

§ 24. Ἐκ τῶν εἰρημένων γίνεται φανερὸν ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δὲν πολλαπλασιάζομεν, παρὰ ἓν μόνον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαςέου μὲ ἓν τοῦ πολλαπλασιαςοῦ· ὅθεν ἀρκεῖ νὰ γνωρίσωμεν τὰ γινόμενα τῶν 9 πρώτων σημαντικῶν ψηφίων διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ὅλους ἐν γένει τοὺς πολλαπλασιασμούς. Τὰ γινόμενα ταῦτα περιλαμβάνονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφεύρεσις ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρα.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 13 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν πίνακα τοῦτον, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν εἴτε ὁριζοντείως, εἴτε καθέτως, τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, κτλ. Ἐὰν ὁριζοντείως γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου ψηφίου καὶ εἰς τὴν δευτέραν γραμμὴν, τὰ ἴδια ταῦτα ψηφία λαμβανόμενα δίς· εἰς τὴν τρίτην γραμμὴν τὰ ψηφία τῆς πρώτης λαμβανόμενα τρίς· ἔπειτα τετράκις εἰς τὴν τετάρτην, καὶ οὕτω καθεξῆς.

§ 25. Ἡ χρῆσις τοῦ πίνακος τούτου εἶναι ἁπλουστάτη. Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 8, ζητοῦμεν εἰς τὴν ἀριστερὰν κάθετον στήλην τὸν ἀριθμὸν 7, καὶ προβαίνομεν ὁριζοντείως μέχρι τῆς καθέτου στήλης τοῦ ἀριθμοῦ 8. Ὁ ἀριθμὸς 56 ὅστις ἀντιστιχεῖ συγχρόνως εἰς τὸν 7 καὶ 8, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Ἐὰν λάβωμεν τὸν 7 εἰς τὴν ἄνω ὁριζόντειαν γραμμὴν, καὶ τὸν 8 εἰς τὴν πρὸς ἀριστερὰ κάθετον στήλην, θέλομεν εὕρει κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ αὐτὸ γινόμενον 56. Ὅθεν εὑρίσκομεν πάντοτε τὸ αὐτὸ γινόμενον ὁποιονδήποτε ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστέον, ἢ ὡς πολλαπλασιαστήν. Διὰ νὰ ἐκτελῶμεν δὲ μὲ ταχύτητα καὶ ἀκρίβειαν ὅλους ἐνγένει τοὺς πολλαπλασιασμοὺς, πρέπει νὰ ἔχωμεν πάντοτε εἰς τὴν μνήμην μας τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα.

§ 26. Ἐπαρατηρήσαμεν ὅτι (22) διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολλαπλασιαστέον ἐκ πολλῶν ψηφίων, μ' ἕνα πολλαπλασιαστὴν ἐξ ἑνὸς μόνου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας, καὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου μὲ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· οὕτω διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 624 μὲ 8, καταστρόνομεν τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον,

| | |
|---|---|
| 624 | πολλαπλασιαστέος· |
| 8 | πολλαπλασιαστής· |
| 32 | γινόμενον τῶν μονάδων· |
| 16 | γινόμενον τῶν δεκάδων· |
| 48 | γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων |
| 4992 | ὅλον γινόμενον |

καὶ λέγομεν, 8 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 4 δίδει 32 μονάδας, ἢ 3 δεκάδας καὶ 2 μονάδας· θέτομεν τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας ὑπὸ τὰς ἀμοιβαίας των στήλας· καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὸ ψηφίον 2 τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου· 8 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 2 δεκάδας δίδει γινόμενον 16 δεκάδας, ἢ μίαν ἑκατοντάδα καὶ 6 δεκάδας· θέτομεν τὰς 6 δεκάδας ὑπὸ τὰς 3 τοῦ γινομένου 32, καὶ τὴν ἑκατοντάδα πρὸς τ' ἀριστερὰ τῶν δεκάδων· τέλος ἐρχόμενοι εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου λέγομεν, 8 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 6 ἑκατοντάδας δίδει 48 ἑκατοντάδας, ἢ 4 χιλιάδας καὶ 8 ἑκατοντάδας· θέτομεν τὰς 8 ἑκατοντάδας ὑπὸ τὰς ἤδη εὑρεθείσας, καὶ ἀριστερὰ αὐτῶν τὰς 4 χιλιάδας τοῦ γινομένου. Ἀφοῦ ἤδη ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας καὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, προσθέτομεν καὶ τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ὅλον γινόμενον 4,992.

§ 27. Δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην, παρατηροῦντες πρῶτον ὅτι εἶναι ἀνωφελὲς νὰ γράφωμεν ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα· καὶ δεύτερον ὅτι ἐξ ἑκάστου μερικοῦ γινομένου πρέπει νὰ θέτωμεν τὰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως, καὶ νὰ κρατῶμεν εἰς τὴν μνήμην μας τὰς τῆς ἀνωτέρας διὰ νὰ τὰς προσθέτωμεν εἰς τὰ ἀκόλουθα γινόμενα. Π.χ. εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ἀπὸ τὸ γινόμενον 32 τῶν μονάδων, εἰμποροῦμεν νὰ θέτωμεν ἁπλῶς τὰς 2 μονάδας, καὶ νὰ κρατήσωμεν εἰς τὴν μνήμην μας τὰς 3 δεκάδας διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ μερικὸν γινόμενον τῶν δεκάδων 16· ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ τὰς 3 δεκάδας σχηματίζομεν 19 δεκάδας, ἐκ τῶν ὁποίων θέτομεν τὰς 9 καὶ κρατοῦμεν τὰς 10 δεκάδας ἢ τὴν μίαν ἑκατοντάδα, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὰς 48 ἑκατοντάδας, καὶ ἔχομεν 49· ἐπειδὴ δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος δὲν ἔχει ἄλλο ψηφίον, θέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὰς 49 ταύτας ἑκατοντάδας. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον λαμβάνομεν λοιπὸν ἀμέσως τὸ ὅλον γινόμενον -- 4992, χωρὶς νὰ γράψωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα τῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, κτλ.

Διὰ νὰ λάβωμεν λοιπὸν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ ἄλλου ἔχοντος ἓν μόνον ψηφίον, λαμβάνομεν διαδοχικῶς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ, τὸ γινόμενον τῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, ἢ τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ἐκ τῶν μερικῶν τούτων γινομένων θέτομεν εἰς τὸ ὅλον γινόμενον τοὺς μὴ ὑπερβαίνοντας τὸν 9 ἀριθμοὺς, φέροντες εἰς τὸ ἀκόλουθον γινόμενον τὰς δεκάδας ἢ τὰς ἑκατοντάδας τούτων τῶν μερικῶν γινομένων· φθάνοντες δὲ εἰς τὸ τελευταῖον πρὸς ἀριςερὰ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαςέου, γράφομεν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ὡς ὑπάρχει.

§ 28. Ἂς ἐφαρμώσωμεν τὸν τρόπον τοῦτον εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

Ἠγόρασέ τις 324 πήχας τσόχης, πρὸς 7 δραχμὰς τὴν πήχην· ποίαν ποσότητα πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰς 324.

Κατὰ τὴν φυσικὴν τάξιν πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν 7 ὡς πολλαπλασιαςέον, καὶ τὸν 324 ὡς πολλαπλασιαςὴν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ ἦναι δραχμαί· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εἶναι τὸ αὐτὸ, ὁποιοσδήποτε ἀπὸ τοὺς παράγοντας καὶ ἂν ἦναι ὁ πολλαπλασιαςέος (25), ἐκλέγομεν διὰ τὴν εὐκολίαν ὡς πολλαπλασιαςέον τὸν 324, καταςρώνομεν ὡς ἀντικρυ τὸν πολλαπλασιασμὸν, καὶ ἔπειτα λέγομεν· 7 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 4 δίδει γινόμενον 28, θέτομεν 8 καὶ κρατοῦμεν 2· 7 ἐπὶ 2 δίδει 14, καὶ 2, 16· θέτομεν 6 καὶ κρατοῦμεν 1· 7 ἐπὶ 3 ἰσοῦται μὲ 21, καὶ 1, 22· θέτομεν 22, καὶ λαμβάνομεν τὸ ὅλον γινόμενον -- 2,268, ἤτοι τὴν ποσότητα τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρώσῃ.

$$\begin{array}{r} 324 \text{ πήχ.} \\ 7 \text{ δραχ.} \\ \hline 2268 \text{ δραχ.} \end{array}$$

§ 29. Πολλάκις ὁ πολλαπλασιαςὴς ἔχει πολλὰ ψηφία· ἂς ἴδωμεν κατὰ πρῶτον πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς, καθ᾽ ἣν περίςασιν ὁ πολλαπλασιαςὴς ἔχει δύο ψηφία. Πρὸς τοῦτο, ἔςω τὸ ἀκόλουθον ζήτημα.

542 ἐργάται, ἐργαζόμενοι εἴς τι ἐργοςάσιον, κερδίζουν 23 δραχμὰς ἕκαςος τὴν ἑβδομάδα· πόσον θέλουν κερδίσει οἱ ἐργάται οὗτοι ὁμοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς ἑβδομάδος;

Δυνάμεθα, καταςρώνοντες τὸν πολλαπλασιασμὸν, νὰ λάβωμεν

23 ὡς πολλαπλασιαςὴν, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 542 κατὰ πρῶτον μὲ 3 καὶ ἔπειτα μὲ 2.

Πλὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ γινόμενον 1626 τοῦ 542 ἐπὶ τῶν 3 μονάδων, εἶναι τὸ καθ' αὐτὸ γινόμενον τῆς μερικῆς ἐργασίας· ὄχι ὅμως καὶ τὸ 1084 τοῦ 542 ἐπὶ τῶν 2 δεκάδων. Ἐπειδὴ, πολλαπλασιάζοντες 2 μὲ 2 δεκάδας, λαμβάνομεν 4 δεκάδας, καὶ 2 δεκάδες πολλαπλασιαζόμεναι μὲ 4 δεκάδας δίδουν 8 ἑκατοντάδας· ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἕκαςον ψηφίον τοῦ μερικοῦ γινομένου 1034, ἔχει τιμὴν δεκάκις μεγαλητέραν ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἤδη ἔχει, ὡς ἐκ τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν κατέχει· ἐὰν λοιπὸν, διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ὅλον γινόμενον τῆς ἐργασίας, προσθέσωμεν τὰ δύο γινόμενα 1626 καὶ 1084, πρέπει, θέτοντες τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπὸ τὸ πρῶτον, νὰ δώσωμεν εἰς ἕκαςον ψηφίον τοῦ 1084 τιμὴν δεκάκις μεγαλητέραν, τὸ ὁποῖον γίνεται εὐκολώτατα, (5), ἐὰν θέσωμεν τὸ ψηφίον 4 τοῦ ἀριθμοῦ 1084 ὑπὸ τὸ 2 τῶν δεκάδων τοῦ 1626, τὸ 8 ὑπὸ τὸ 6, τὸ 0 ὑπὸ τὸ 1, κτλ· κατὰ τὸν ἄντικρυ τρόπον. Κάμνοντες ἤδη τὴν πρόσθεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι οἱ ἐργάται κερδίζουν 12,466 δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα.

| | |
|---|---|
| 542 | 542 |
| 3 | 2 |
| 1626 | 1084 |

```
 1626
1084
12466
```

§ 30 Μετὰ τὰ ἄνω εἰρημένα δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὁσαδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὰ ψηφία τῶν δύο παραγόντων· ἔςω π.χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν 23,434 μὲ 726. Καταςρόνομεν τὴν ἐργασίαν ὡς ἄντικρυ· ἐκτελοῦμεν τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ 23,434, ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 6 τῶν μονάδων, ἔπειτα τὸ αὐτὸ ὡς πρὸς τὸ δεύτερον ψηφίον 2 τοῦ πολλαπλασιαςοῦ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τοῦτο παριςάνει δεκάδας, δίδει μερικὸν γινόμενον δεκάκις μεγαλήτερον παρ' ἂν ἐπαρίςανε μονάδας· φέρομεν λοιπὸν κατὰ μίαν τάξιν πρὸς τ' ἀριςερὰ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 56868, τὸν ὁποῖον μᾶς ἔδωσε, διὰ νὰ λάβουν τιμὴν δεκάκις μεγαλητέραν. Ὡσαύτως τὸ

```
    23434
      726
   140604
   46868
 163038
 17013084
```

μερικὸν γινόμενον 193038 ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 27434, ἐπὶ τοῦ ψηφίου 7 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἶναι ἑκατοντάκις μεγαλήτερον παρ' ἂν τὸ ψηφίον 7 ἦτον ἁπλαῖ μονάδες, ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τοῦτο κατέχει τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων εἰς τὸν ἀριθμὸν 726. Ὅθεν διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἑκατοντάκις μεγαλήτερον, πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ πρὸς ἀριστερὰ πρῶτον αὐτοῦ ψηφίον ὑπὸ τὸ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πρώτου γινομένου.

§ 31. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχῃ πολλὰ ψηφία, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ἂν ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἐπαρίστανε μονάδας· ἀλλ' ὅταν γράφωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα, πρέπει, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν μὲ δεκάδα, νὰ θέτωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων, ἢ νὰ φέρωμεν τὸ πρῶτον τοῦτο ψηφίον κατὰ μίαν τάξιν πρὸς ἀριστερὰ, καὶ νὰ θέτωμεν πρὸς τ' ἀριστερὰ αὐτοῦ διαδοχικῶς τ' ἄλλα· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μὲ μίαν ἑκατοντάδα ἢ χιλιάδα κτλ· νὰ θέτωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ μερικοῦ γινομένου ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τῶν χιλιάδων, κτλ. ἔπειτα τέλος νὰ προσθέτωμεν ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον ἐκφράζει τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἐν γένει λαμβάνομεν τόσα μερικὰ γινόμενα ὅσα ψηφία ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

§ 32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπίσης εὔκολος ἐὰν εὑρίσκωνται μηδενικὰ εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν π.χ. 7,004 μὲ 23, λέγομεν· 4 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 3 δίδει 12, θέτομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 1· 3 ἐπὶ 0 δίδει 0, καὶ 1 ἴσον μὲ 1, θέτομεν 1· 3 ἐπὶ 0 ἴσον μὲ 0, θέτομεν 0 εἰς τὸ γινόμενον· τέλος 3 ἐπὶ 7 ἴσον μὲ 21, καὶ θέτομεν 21. Κάμνοντες τὸ ἴδιον καὶ μὲ τὰς 2 δεκάδας, λαμβάνομεν τὸ ὅλον γινόμενον 161,092.

```
  7004
    23
 -----
 21012
14008
------
161092
```

Δὲν ὑπάρχει ἐπίσης καμμία δυσκολία ὅταν τὰ μηδενικὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν· διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ.

γινόμενον τοῦ 4526 ἐπὶ 3004, ἐκτελοῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου 4526, ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 4 τῶν μονάδων· καὶ ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δὲν ἔχει μήτε δεκάδας μήτε ἑκατοντάδας, δὲν ἔχομεν διὰ τὰς δύο ταύτας τάξεις μερικὰ γιόμενα.

$$\begin{array}{r} 4526 \\ 3004 \\ \hline 18104 \\ 13578\phantom{0} \\ \hline 13596104 \end{array}$$

Μεταβαίνομεν λοιπὸν εἰς τὸ σημαντικὸν ψηφίον 3 τῶν χιλιάδων, τὸ ὁποῖον ἐπειδὴ κατέχει τὴν τάξιν τῶν μονάδων τῆς χιλιάδος εἰς τὸν ἀριθμὸν 3004, τὸ ψηφίον 8 τοῦ μερικοῦ γινομένου 13578, πρέπει νὰ τεθῇ ὑπὸ τὸ 8 τοῦ ἀριθμοῦ 18104, ἢ εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ὁσάκις λοιπὸν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει μηδενικὰ, τὰ παραλείπομεν, καὶ γράφομεν πάντοτε τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ μερικοῦ γινομένου εἰς τὴν στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν εὑρίσκεται.

§ 33. Ἐὰν τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἦναι πρὸς τὰ δεξιὰ ὅλων τῶν ἄλλων ψηφίων, ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 28,000, πρέπει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ θέτωμεν ὅλα ταῦτα τὰ μηδενικὰ, διὰ νὰ διατηρήσουν τὴν σχετικὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν, ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του ἕκαστον ψηφίον ἔχει, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα.

$$\begin{array}{r} 28000 \\ 47 \\ \hline 196000 \\ 112000\phantom{0} \\ \hline 1316000 \end{array}$$

§ 34. Ὅταν δ' ἐξ ἐναντίας τὰ μηδενικὰ εὑρίσκωνται μετὰ τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Ζητεῖται π.χ. νὰ εὕρωμεν εἰς μέτρα τὸ μῆκος ὁδοῦ τινος ἐκ 235 λευγῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει 5000 μέτρα. Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 235 μὲ τὰ ἀκολουθοῦντα τὸ 5 τρία μηδενικὰ, πολλαπλασιάζομεν

$$\begin{array}{r} 235 \\ 5000 \\ \hline 1175000 \end{array}$$

235 μὲ 5, καὶ λαμβάνομεν τὸ μερικὸν γινόμενον 1175· ἀλλ' ἐπειδὴ 5 κατέχει τὴν τάξιν τῶν χιλιάδων, τὸ γινόμενον αὐτοῦ 1175 εἶναι ἐπίσης χιλιάδες, καὶ ἐὰν τὸ θεωρήσωμεν ὡς 1175

μονάδας, θέλει εἶναι 1000 φορὰς μικρότερον· πρέπει λοιπὸν τὸ πρῶτον ψηφίον 5 νὰ τεθῇ εἰς τὴν τάξιν τῶν χιλιάδων, δηλ. νὰ θέσωμεν κατόπιν του τρία μηδενικὰ, ὥςε νὰ κατέχῃ τὴν τετάρτην τάξιν· τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν γινόμενον 1,175,000 μέτρα.

§ 35. Διὰ ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης ἐργασίας γίνονται ἁπλούςεροι οἱ τοιοῦτοι πολλαπλασιασμοὶ, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι, καὶ εἰς τὰς δύο περιςάσεις ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν τοῦ ὅλου γινομένου εἶναι ἴσος μὲ τὸν τοῦ πολλαπλασιαςέου, ἢ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ. Ὁσάκις λοιπὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου παράγοντος εὑρίσκονται μηδενικὰ, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελῶμεν τὰ μερικὰ γινόμενα τῶν σημαντικῶν ψηφίων, τὸ δὲ κεφάλαιόν των, εἰς τὸ ὁποῖον προσθέτομεν ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαςέος ἢ ὁ πολλαπλασιαςὴς, θέλει εἶναι τὸ ὅλον γινόμενον τῆς ἐργασίας.

Ἐὰν συγχρόνως καὶ εἰς τοὺς δύο παράγοντας εὑρίσκωνται μηδενικὰ, ἐπειδὴ κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα, πρέπει ἐξ ἑνὸς μέρους νὰ θέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου τὰ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ἀρκεῖ διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ὅλον γινόμενον, νὰ θέσωμεν τὰ μηδενικὰ καὶ τῶν δύο παραγόντων εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου γινομένου.

§ 36. Συνάγομεν ἀκόμη ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ταύτην, μέθοδον σύντομον εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμόν τινα μὲ 10, 100, ἢ 1000· ἔςω 24 ὁ ἀριθμὸς οὗτος· ἐπειδὴ 24 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὴν μονάδα εἶναι πάντοτε 24, βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν ἓν μηδενικόν· μὲ ἑκατὸν 2 μηδενικά· μὲ χίλια 3, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἔχομεν οὕτω τὰ γινόμενα 240, 2,400, 24,000, κτλ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς μεταξύτων, τέσσαρας π.χ., πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο πρώτους μεταξύτων, τὸ γινόμενον ἔπειτα τῶν δύο τούτων μὲ τὸν τρίτον, καὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν μὲ τὸν τέταρτον.

## Περὶ Διαιρέσεως.

§ 37. Διὰ νὰ μάθωμεν ποσάκις ὁ ἀριθμὸς 24 περιέχει τὸν 6, ἀφαιροῦμεν κατ' ἀρχὰς 6 ἀπὸ 24, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 18· ἐπαναλαμβάνομεν ἔπειτα τὴν ἰδίαν ἐργασίαν τρὶς, καὶ εἰς τὴν τελευταίαν εὑρίσκομεν κατάλοιπον μηδὲν, τὸ ὁποῖον μᾶς δεικνύει ὅτι ὁ 24 περιέχει τὸν 6 τετράκις. Ἐπειδὴ ἡ ἐργασία αὕτη καταντᾷ πολλὰ ἐπίπονος ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ὀλίγον μεγάλοι, ἐζήτησαν μέθοδον ἁπλουςέραν καὶ συντομωτέραν πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῆς, καὶ τὴν ὁποίαν ὠνόμασαν Διαίρεσιν.

Ἡ διαίρεσις λοιπὸν εἶναι ἐργασία δι ἧς εὑρίσκομεν ποσάκις ἀριθμός τις ὀνομαζόμενος Διαιρέτης περιέχεται εἰς ἄλλον ἀριθμὸν ὀνομαζόμενον Διαιρούμενον. Ὁ ἀριθμὸς ὅςις παριςάνει ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται εἰς τὸν διαιρούμενον, ὀνομάζεται Πηλίκον. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα 24 εἶναι ὁ διαιρούμενος, 6 ὁ διαιρέτης, καὶ 4 τὸ πηλίκον.

§ 38. Ὅσον ὁ διαιρούμενος αὐξάνει, ἐνῷ ὁ διαιρέτης μένει ὁ αὐτὸς, τόσον καὶ τὸ πηλίκον· διότι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ διαιρουμένου 24, ἐλαμβάναμεν τὸν 36, τὸ πηλίκον ἀντὶ 4 ἤθελεν εἶναι 6· καὶ ὅσον σμικρύνεται ὁ διαιρούμενος, τόσον καὶ τὸ πηλίκον. Ἐξ ἐναντίας, ἐνῷ ὁ διαιρούμενος μένει ὁ αὐτὸς, τὸ πηλίκον σμικρύνεται, ὅσον ὁ διαιρέτης αὐξάνει, τὸ ὁποῖον εἶναι σαφὲς, ἐπειδὴ, ἐνῷ ὁ διαιρούμενος εἶναι πάντοτε 24, ἐὰν ὁ διαιρέτης ἀντὶ 6 ἦτον 8, τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι 3 ἀντὶ 4, καὶ ἀντιςρόφως, ὅσον ἐλαττοῦται ὁ διαιρέτης, τόσον τὸ πηλίκον αὐξάνει.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον 4 μὲ τὸν διαιρέτην 6, εὑρίσκομεν 24; ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον 6 μὲ τὸν διαιρέτην 6, λαμβάνομεν 36· τέλος, ἐὰν τὸ πηλίκον 3 μὲ τὸν διαιρέτην 8, εὑρίσκομεν πάλιν 24· ὅθεν συνάγομεν ὅτι ὁ διαιρέτης ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ πηλίκον, πρέπει πάντοτε νὰ δώσῃ τὸν διαιρούμενον.

§ 39. Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ἀπαιτοῦνται τρεῖς διαδοχικαὶ ἐργασίαι· ά νὰ ζητήσωμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται εἰς τὸν διαιρούμενον, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον· β' νὰ

πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην μὲ τὸ πηλίκον, διὰ νὰ λάβωμεν ἓν γινόμενον· γ′ ν᾽ ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἀπὸ τὸν διαιρούμενον, διὰ νὰ ἴδωμεν ἐὰν μένῃ κατάλοιπον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ποσάκις ὁ 8 περιέχεται εἰς τὸν 56, καταςρώνομεν τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

| | | |
|---|---|---|
| Διαιρούμενος | 56 | 8 διαιρέτης |
| γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοῦ πηλ. | 56 | 7 πηλίκον |
| κατάλ. | 00 | |

α′ Ἐπειδὴ ὁ 56 περιέχει δύο μόνον ψηφία, ὁ Πυθαγορικὸς πίναξ δύναται νὰ δώσῃ τὸ ζητούμενον πηλίκον, διότι αὐτὸς περιέχει ὅλα τὰ γινόμενα τῶν ὁποίων οἱ παράγοντες ἔχουν ἓν μόνον ψηφίον. Ζητοῦμεν λοιπὸν εἰς τὴν ὁριζόντειον γραμμὴν τοῦ 8, τὸν ἀριθμὸν 56 ἢ τὸν προσεγγίζοντα εἰς αὐτὸν περισσότερον, καὶ ἄνω τῆς καθέτου ςήλης τοῦ ἀριθμοῦ 56, εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον 7· ὁ 8 λοιπὸν περιέχεται 7 φορὰς εἰς τὸν 56· ὅθεν γράφομεν 7 εἰς τὸ πηλίκον.

β′ Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην μὲ τὸ πηλίκον 7, καὶ λαμβάνομεν γινόμενον 56, τὸ ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὸν διαιρούμενον, τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας τοῦ ἑνὸς ὑπὸ τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας τοῦ ἄλλου.

γ′ Ἀφαιροῦμεν τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον τοὺς δύο τούτους ἀριθμούς, καὶ ἔχομεν κατάλοιπον 0· ὅθεν ὁ 8 περιέχεται ἀκριβῶς ἑπτάκις εἰς τὸν 56.

§ 40. Ὁ διαιρέτης δὲν περιέχεται πάντοτε ἀκριβῶς εἰς τὸν διαιρούμενον, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίςασιν, ἓξ μένει ἓν κατάλοιπον·

| | | |
|---|---|---|
| διαιρούμ. | 73 | 8 διαιρ. |
| | 72 | $9\frac{1}{8}$ πηλ. |
| κατ. | 1 | |

διότι ἐὰν καταςρώσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ 73 διὰ 8 ὡς παριςάνεται ἀνωτέρω, καὶ ἐξακολουθήσωμεν, ὡς εἴπομεν, εὑρίσκομεν εἰς τὸν πίνακα ὅτι 9 εἶναι ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς ὁ περιεχόμενος 8 φορὰς εἰς τὸν 73, ἐπειδὴ ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸ πηλίκον 10, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ διαιρέτου θέλει εἶναι 80 μεῖζον τοῦ 73. Θέτομεν λοιπὸν 9 εἰς τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον τοῦτο μὲ τὸν διαιρέτην

8, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 72 ἀπὸ τὸν διαιρούμενον 73, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 1, τὸ ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ διαιρέσωμεν διὰ 8· ἀλλ' ἡ μονὰς διαιρουμένη διὰ 8 δίδει ἓν ὄγδοον, τὸ ὁποῖον παριστάνεται οὕτως $\frac{1}{8}$· ἐὰν προσθέσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ πηλίκον, λαμβάνομεν 9 $\frac{1}{8}$.

§ 41. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν 96 διὰ 6, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 96 δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸν πίνακα, πρέπει νὰ προστρέξωμεν εἰς ἄλλον τινὰ τρόπον. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι 6 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 10 δίδει γινόμενον 60 (35), μικρότερον τοῦ 96, ἑπομένως τὸ πηλίκον ἔχει δύο ψηφία, ἤτοι δεκάδας καὶ μονάδας. Εἰς τὴν νέαν ταύτην περίστασιν εὐκολώτερον εἶναι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν κατὰ μέρος, καὶ νὰ ζητήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, καὶ ἔπειτα τὸ τῶν μονάδων.

| | | |
|---|---|---|
| διαιρούμ. | 96 | 6 διαιρ. |
| | 6 | 16 πηλ. |
| | 36 | |
| | 36 | |
| | 00 | |

Ἰδοὺ πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἐργασία. Χωρίζομεν κατὰ πρῶτον τὸ ψηφίον 9 τῶν δεκάδων διὰ μιᾶς ὑποστιγμῆς, τὸ θεωροῦμεν ὡς ἂν ἦτο μόνον, καὶ λέγομεν· ὁ 6 εἰσέρχεται εἰς τὸν 9 μίαν φοράν, γράφομεν 1 εἰς τὸ πηλίκον· πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην μὲ τὸ πηλίκον, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 6 ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ διαιρουμένου, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 3, εἰς τὸ πλάγιον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων 6. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὸν διαιρούμενον, καὶ τὸ ψηφίον 9 τοῦ διαιρουμένου τούτου παριστάνει 9 δεκάδας, καὶ τὸ πρῶτον ἄρα ψηφίον 1 τοῦ πηλίκου παριστάνει ὡσαύτως δεκάδας. Ζητοῦμεν ἤδη ποσάκις ὁ 6 περιέχεται εἰς τὸν νέον μερικὸν διαιρούμενον 36, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 6, τὸν ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸ πηλίκον πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς δεκάδος· πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην 6 μὲ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου· ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 36 ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρούμενον, καὶ εὑρίσκομεν κατάλοιπον 0· ὁ 6 περιέχεται λοιπὸν ἀκριβῶς 16 φορὰς εἰς τὸν 96.

§ 42. Ὅταν ὁ διαιρούμενος σύγκηται ἐκ πολλῶν ψηφίων, ἡ

ἐργασία γίνεται ἀπαραλλάκτως ὡς ἡ προηγουμένη, καθὼς φαίνεται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅπου ζητεῖται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 21,584 διὰ 8.

| | |
|---|---|
| 21584 | 8 διαιρέτης |
| | 2698 πηλίκον |
| 16 | γινόμενον τῶν χιλιάδων τοῦ πηλ. ἐπὶ τοῦ διαιρέτου. |
| 55 | κατάλ. εἰς τὸ πλάγιον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ 5 τοῦ διαιρουμένου. |
| 48 | γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τοῦ διαιρέτου. |
| 78 | κατάλ. πλησίον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ 8 τοῦ διαιρουμένου. |
| 72 | γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τοῦ διαιρέτου. |
| 64 | κατάλ. πλησίον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ 4 τοῦ διαιρουμένου. |
| 64 | γινόμενον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τοῦ διαιρέτου. |
| 00 | |

Ἐπειδὴ 8 δὲν περιέχεται εἰς τὸ 2, ἐλάβαμεν 21 ὡς πρῶτον μερικὸν διαιρούμενον, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ 8 εἰσέρχεται δίς· γράφομεν 2 εἰς τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν 8 μὲ 2, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 16 ἀπὸ 21, καὶ ἔχομεν κατάλοιπον 5, εἰς τὸ πλάγιον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 5 τοῦ διαιρουμένου. Ὁ 8 περιέχεται εἰς τὸν 55, 6 φοράς· πολλαπλασιάζομεν 8 μὲ 6, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 48 ἀπὸ 55, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 7· κατεβάζομεν τὸ 8 τοῦ διαιρουμένου, διαιροῦμεν 78 διὰ 8, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 9· πολλαπλασιάζομεν 8 μὲ 9, ἀφαιροῦμεν 72 ἀπὸ 78, καὶ ἔχομεν κατάλοιπον 6· τέλος κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 4 τοῦ διαιρουμένου, διαιροῦμεν 64 διὰ 8, πολλαπλασιάζομεν 8 μὲ 8, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 64 ἀπὸ 64, καὶ εὑρίσκομεν κατάλοιπον 0· ὅθεν ὁ 9 περιέχεται 2,698 φορὰς εἰς τὸν 21,584.

§ 43. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν 280,427 διὰ 7, ἐκτελοῦμεν τὴν ἐργασίαν ὡς ἀκολούθως.

Εὑρίσκομεν εὐκολώτατα τὸ πρῶτον ψηφίον 4 τοῦ πηλίκου· πλὴν πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην μὲ τὸ πρῶτον τοῦτο ψηφίον, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον, εὑρίσκομεν κατάλοιπον 0, πλησίον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ αὐτὸ μηδέν. Ὅθεν ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει μερικὸς διαιρούμενος, δὲν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ψηφίον τι εἰς τὸ πηλίκον· διὰ νὰ διατηρήσωμεν ὅμως τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν σημαντικῶν ψηφίων, πρέπει νὰ θέσωμεν μηδὲν εἰς τὸ πηλίκον, καὶ νὰ κατεβάσωμεν ἔπειτα τὸ ψηφίον 4, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπειδὴ ὁ 7 δὲν περιέχεται, θέτομεν ἀκόμη καὶ ἕτερον μηδενικὸν εἰς τὸ πηλίκον, καὶ κατεβάζομεν εἰς τὸ πλάγιον τοῦ 4 τὸ ψηφίον 2· ἡ διαίρεσις ἤδη ἐκτελεῖται, καὶ τελειόνει καθὼς εἰς τὰς προηγουμένας περιστάσεις.

| | |
|---|---|
| 280427 | 7. |
| 28 | 40061 |
| 0042 | |
| 42 | |
| 07 | |
| 7 | |
| 0 | |

Ὅθεν ὅταν ὁ διαιρέτης δὲν περιέχεται εἴς τινα μερικὸν διαιρούμενον, ἢ ὅταν ὁ διαιρούμενος οὗτος ἦναι μηδέν, θέτομεν μηδὲν εἰς τὸ πηλίκον διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν σημαντικῶν ψηφίων, καὶ κατεβάζομεν τὰ ἀκόλουθα ψηφία.

§ 44. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ πολλὰ ψηφία, ἡ ἐργασία εἶναι ὀλίγον τι πλέον συμπεπλεγμένη, δὲν ἔχει ὅμως περισσοτέραν δυσκολίαν· ἔσω νὰ διαιρέσωμεν 128,304 διὰ 243.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης δὲν περιέχεται εἰς τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ διαιρουμένου, λαμβάνομεν τὰ τέσσαρα πρῶτα ὡς μερικὸν διαιρούμενον· διαιροῦμεν 1283 διὰ 243 καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 5· πολλαπλασιάζομεν 5 μὲ 243, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 1215 ἀπὸ 1283, καὶ εὑρίσκομεν κατάλοιπον 68, πλησίον τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ 0· διαιροῦμεν 680 διὰ 243, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 2 καὶ κατάλοιπον 194· ἔπειτα τέλος 1944 διὰ 243, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 8, καὶ κατάλοιπον 0· τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 528.

| | |
|---|---|
| 128304 | 243 |
| 1215 | 528 |
| 680 | |
| 486 | |
| 1944 | |
| 1944 | |
| 00 | |

§ 45. Διὰ νὰ ἐκτελῶμεν λοιπὸν εἰς τοιαύτας περιςάσεις τὴν διαίρεσιν, λαμβάνομεν ἀπὸ τ' ἀριςερὰ τοῦ διαιρουμένου ὅσα ψηφία εἶναι ἱκανὰ νὰ περιέχουν τὸν διαιρέτην· ζητοῦμεν ποσάκις ὁ μερικὸς οὗτος διαιρούμενος περιέχει τὸν διαιρέτην, καὶ εὑρίσκομεν ἓν ψηφίον τοῦ πηλίκου· πολλαπλασιάζομεν τὸ μερικὸν τοῦτο πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρούμενον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ψηφίον τοῦ μερικοῦ πηλίκου τόσας μονάδας, ὥςε νὰ λάβωμεν γινόμενόν τι τὸ ὁποῖον ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρούμενον· κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν, καὶ ἐὰν μείνῃ κατάλοιπον μεγαλήτερον ἀπὸ τὸν διαιρέτην, τότε τὸ μερικὸν πηλίκον εἶναι πολλὰ μικρὸν, καὶ πρέπει ἑπομένως νὰ τὸ αὐξήσωμεν. Εἰς τὸ πλάγιον τοῦ καταλοίπου κατεβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρουμένου· ζητοῦμεν, ὡς καὶ προηγουμένως, ποσάκις ὁ μερικὸς οὗτος διαιρούμενος περιέχει τὸν διαιρέτην· γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν διαιρέτην, διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρούμενον· καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτως, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρουμένου. Ὅταν ἀπαντῶμεν μερικόν τινα διαιρούμενον μὴ περιέχοντα τὸν διαιρέτην, πρέπει, πρὶν κατεβάσωμεν νέον ψηφίον τοῦ διαιρουμένου, νὰ θέσωμεν μηδὲν εἰς τὸ πηλίκον.

§ 46. Δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν τὰς μερικὰς ἐργασίας τῆς διαιρέσεως, μὴ γράφοντες τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου, παρὰ μόνον τὰ κατάλοιπα τὰ ὁποῖα ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν γινομένων τούτων λαμβάνομεν. Ἔςω νὰ διαιρέσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τον ἀριθμὸν 11,214 διὰ τοῦ 267.

| | |
|---|---|
| 11214 | 267 |
| 534 | 42 |
| 00 | |

Ἀφοῦ εὕρομεν ὅτι ὁ διαιρέτης 267 περιέχεται τετράκις εἰς τὸν μερικὸν διαιρούμενον 1121, πολλαπλασιάζομεν τὰς μονάδας 7 τοῦ διαιρέτου μὲ τὸ πρῶτον ψηφίον 4 τοῦ πηλίκου, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 28 ἀπὸ τὸ ψηφίον 1 τῶν μονάδων τοῦ μερικοῦ διαιρουμένου. Ἀλ-

λ' ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 28 ἀπὸ 1, δανειζόμεθα δύο δεκάδας ἀπὸ τὸ 2 τοῦ μερικοῦ διαιρουμένου, καὶ προσθέτομεν τὰς 20 μονάδας τὰς ὁποίας παριστάνουν εἰς τὴν μίαν τὴν ὁποίαν ἤδη ἔχομεν, καὶ λαμβάνομεν 21 μονάδας· καὶ ἐπειδὴ ἀκόμη δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 28 οὐδὲ ἀπὸ 21, δανειζόμεθα μίαν ἑκατοντάδα ἀπὸ τὸ 1 τοῦ μερικοῦ διαιρουμένου 1121. Τὴν μίαν ταύτην ἑκατοντάδα ἤτοι τὰς 10 δεκάδας, τὰς προσθέτομεν εἰς τὰς 2 τὰς ὁποίας ἤδη ἔχομεν, καὶ λαμβάνομεν 12 δεκάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας δανειζόμεθα 3 ἰσοδυναμούσας μὲ 30 μονάδας· προσθέτομεν ταύτας εἰς τὴν εὑρισκομένην εἰς τὴν τάξιν τῶν μονάδων, καὶ ἔχομεν 31 μονάδας· ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὰς 28 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 3, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Μεταβαίνομεν εἰς τὸ ψηφίον 6 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου, πολλαπλασιάζομεν 4 μὲ 6, καὶ λαμβάνομεν γινόμενον 24, τὸ ὁποῖον πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 9 δεκάδας, αἵτινες μένουν ἀκόμη εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων ἐκ τῶν 12 τὰς ὁποίας εἴχαμεν, καὶ ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐδανείσθημεν τὰς 3. Προστρέχομεν ἤδη εἰς τὰς χιλιάδας, δανειζόμεθα μίαν χιλιάδα ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 ἑκατοντάδας, ἀφίνομεν τὰς 8 εἰς τὰς ἑκατοντάδας, καὶ μεταφέρομεν τὰς 2 εἰς τὰς δεκάδας τὰς ὁποίας προσθέτομεν εἰς τὰς 9, καὶ ἔχομεν 29· ἀφαιροῦμεν 24 ἀπὸ 29 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 5 τὸ ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας. Ὁ πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀριθμὸς τοῦ μερικοῦ διαιρουμένου 11 ἔγινε κατὰ πρῶτον 10, ἐπειδὴ ἐδανείσθημεν μίαν ἑκατοντάδα· ἐκ τοῦ 10 τούτου ἐδανείσθημεν ἀκόμη 2, ὅθεν ἔγινεν 8· ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μερικὸν πηλίκον 4 μὲ τὰς ἑκατοντάδας 2 τοῦ διαιρέτου, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 8 τὸ γινόμενον 8, εὑρίσκομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας κατάλοιπον μηδέν. Εἰς τὸ πλάγιον τοῦ καταλοίπου 53 κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 4 καὶ ἔχομεν τὸν μερικὸν διαιρούμενον 534, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κάμνομεν τὰς αὐτὰς ἐργασίας, καὶ εὑρίσκομεν τὰς μονάδας 2 τοῦ πηλίκου καὶ κατάλοιπον μηδέν.

§ 47. Ἀντὶ νὰ δανειζώμεθα πραγματικῶς, ὡς ἐκάμαμεν ἀ-

νωτέρω, ἁπλούστερον εἶναι νὰ ὑποθέτωμεν ὅτι δανειζόμεθα, καὶ κάμνοντες τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰ πρὸς τ' ἀριστερὰ ψηφία, νὰ τὰ ὑποθέτωμεν ἐλαττούμενα κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἐδανείσθημεν· εἶναι ὅμως ἀκόμη εὐκολώτερον ν' ἀφίνωμεν τὰ ψηφία ταῦτα ὡς ὑπάρχουν, καὶ ν' αὐξάνωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ πηλίκου ἐπὶ τοῦ διαιρέτου κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἐδανείσθημεν, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό. Οὕτως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον 4 μὲ 7 καὶ ὑποθέτοντες ὅτι τὸ 1 τῶν μονάδων τοῦ μερικοῦ διαιρουμένου ἔγινε 31, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 28 ἀπὸ 31 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 3· κρατοῦμεν τὰς 3 δεκάδας τοῦ 31, προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον 24 τοῦ 6 ἐπὶ 4, καὶ ἔχομεν 27, τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ 32 καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 5· κρατοῦμεν ἀκόμη τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ 32, προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον 8 τοῦ 2 ἐπὶ 4, καὶ ἔχομεν 11, τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ 11 καὶ εὑρίσκομεν κατάλοιπον 0.

§ 48. Ὅταν ὁ διαιρούμενος καὶ ὁ διαιρέτης λήγουν εἰς μηδενικά, διαιροῦμεν μόνον τὰ σημαντικὰ ψηφία, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ πηλίκον ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται διὰ νὰ διατηρήσουν τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν σημαντικῶν ψηφίων. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν π.χ. 60,000 διὰ 300, βλέπομεν ὅτι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἔχῃ τρία ψηφία, καὶ ὅτι τὸ σημαντικὸν ψηφίον 2 τοῦ πηλίκου εἶναι ἑκατοντὰς, καὶ λαμβάνει τὴν τιμὴν ταύτην ἐὰν θέσωμεν πρὸς τὰ δεξιά του 2 μηδενικά.

| | |
|---|---|
| 60 000 | 300 |
| 000 | 200 |

Εἴδομεν (36) πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα μὲ 10, 100, 1000· ἡ ἀντίστροφος ἐργασία μᾶς δεικνύει πῶς νὰ διαιρῶμεν ἀριθμόν τινα λήγοντα εἰς μηδενικὰ μὲ 10, 100, 1000. Διότι ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, δύο εἰς τὴν δευτέραν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

§ 49. Ὅταν μόνος ὁ διαιρούμενος λήγῃ εἰς μηδενικά, τὰ καταβάζομεν διαδοχικῶς ὡς καὶ τ' ἄλλα ψηφία· ὅταν δὲ μόνος ὁ

διαιρέτης, ἐξαλείφομεν διὰ τοῦ νοὸς τὰ μηδενικὰ ταῦτα, χωρίζομεν καὶ ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρουμένου τόσα ψηφία ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν διαίρεσιν ἐπὶ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ διαιρουμένου διὰ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου. Τὰ χωριζόμενα ψηφία τοῦ διαιρουμένου μένουν εἰς τὸ κατάλοιπον.

Ὅταν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρουμένου ἦναι περισσότερα μηδενικὰ παρὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρέτου, ἐξαλείφομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρουμένου, καὶ τόσα ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρέτου, καὶ ἔπειτα ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω.

§ 50. Μέχρι τοῦδε, εἰς ὅλας τὰς διαιρέσεις τὰς ὁποίας ἐκάμαμεν, ὁ διαιρούμενος καὶ ὁ διαιρέτης ἦσαν ἀριθμοὶ ἀφηρημένοι (3), ἑπομένως καὶ τὸ πηλίκον ἦτον ἀριθμὸς ἀφηρημένος. Ἀλλ' ὑπάρχουν ζητήματα ἐπὶ τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἰς τὰ ὁποῖα τὸ πηλίκον ἄλλοτε συμφωνεῖ μὲ τὸν διαιρούμενον, καὶ ἄλλοτε ὄχι· διὰ νὰ λύσωμεν τὴν δυσκολίαν ταύτην, ἀναφέρομεν δύο παραδείγματα εἰς τὰ ὁποῖα ἀπαντᾶται. Ἀρκεῖ εἰς τὰ τοιαῦτα ζητήματα νὰ ἐννοήσωμεν καλὰ ποίας φύσεως πρέπει νὰ ἦναι αἱ μονάδες τοῦ πηλίκου.

ά. Διὰ νὰ κτίσωμεν 16 μέτρων τοῖχον, χρειαζόμεθα 96 δραχμάς· ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου. Ἐνταῦθα εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν ἑνὸς μέτρου, τὸ πηλίκον θέλει εἶναι δραχμαί, καὶ τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὸν διαιρούμενον 96: Ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, καὶ μᾶς δίδει 6 δραχμὰς διὰ τὸ μέτρον.

| | |
|---|---|
| 96 δρ. | 16 μετ. |
| | 6 δρ. |

β΄ Δι' ἀριθμόν τινα μέτρων οἰκοδομῆς ἐπληρώσαμεν 96 δραχ. πρὸς 6 δρ. τὸ μέτρον· ζητεῖται πόσα μέτρα ἦσαν. Ἐνταῦθα ἐπειδὴ εἰς τὸ πηλίκον ζητοῦμεν μέτρα, τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι διαφορετικῆς φύσεως ἀπὸ τὸν διαιρούμενον· κάμνοντες τὴν ἐργασίαν λαμβάνομεν πηλίκον 16· ἦσαν λοιπὸν 16 μέτρα.

## Περὶ τῆς Δοκιμῆς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως.

§ 51. Δυνάμεθα νὰ κάμωμεν κατὰ πολλοὺς τρόπους τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ά ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαςέον καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς τὸ αὐτὸ γινόμενον τὸ ὁποῖον εὕρομεν μὲ τὸν πολλαπλασιαςέον καὶ πολλαπλασιαςήν. β′ Ἐὰν ἀντιςρόφως διπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαςὴν καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς, πρέπει τὸ γινόμενον νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ μὲ τὰ προηγούμενα. γ′ Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιαςέου, πρέπει νὰ εὕρωμεν εἰς τὸ πηλίκον τὸν πολλαπλασιαςήν. δ′ Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν πολλαπλασιαςέον.

Ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως εἶναι ἁπλουςάτη. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην μὲ τὸ πηλίκον, καὶ προσθέσωμεν, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ τὸ κατάλοιπον, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρούμενον.

## Περὶ τοῦ μεγίςου κοινοῦ διαιρέτου.

§ 52. Ὀνομάζονται διαιρέται ἀριθμοῦ τινος, οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιεχόμενοι ἀκριβῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον· οὕτως 16, 8, 4, 2, εἶναι διαιρέται τοῦ 32, ἐπειδὴ διαιροῦν ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Πᾶς ἀριθμὸς μὴ διαιρούμενος διὰ κανενὸς ἄλλου εἰμὴ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος ὀνομάζεται πρῶτος.

Δύο ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἔχουν ἕνα ἢ πολλοὺς κοινοὺς διαιρέτας· οὕτω 2, 3, 4 καὶ 12, εἶναι διαιρέται κοινοὶ τοῦ 24 καὶ 84· ἀλλ' ἐξ αὐτῶν ὁ 12 εἶναι ὁ μεγαλήτερος, καὶ διαὐτὸν τὸν λόγον τὸν ὀνομάζουν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην· ὁ μέγιςος λοιπὸν κοινὸς διαιρέτης δύο, τριῶν, ἢ πολλῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς ὅςις διαιρεῖ ἕκαςον ἀκριβῶς.

Δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα, ὀνομάζονται πρῶτοι μεταξύ των.

§ 53. Εὑρίσκομεν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν διά τινος σειρᾶς διαιρέσεων· ἔςω π.χ. νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 637 καὶ 143· καταςρώνομεν τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸν ἄντιχρυ τρόπον· διαιροῦμεν 637 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 143 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ κατάλοιπον 65· λαμβάνομεν ἤδη τὸν 143 ὡς διαιρούμενον καὶ τὸ κατάλοιπον 65 ὡς διαιρέτην, καὶ ἔχομεν πηλίκον 2 καὶ κατάλοιπον 13· τέλος διαιροῦμεν 65 διὰ τοῦ καταλοίπου 13, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 5 καὶ κατάλοιπον 0· ὅθεν 13 εἶναι ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 637 καὶ 143.

| 637 | 143 | 65 | 13 |
|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 5 πηλίκ. |
| 65 | 13 | 0 | κατάλ. |

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου, τὸν μικρότερον διὰ τοῦ καταλοίπου, τὸ πρῶτον κατάλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου καταλοίπου, τὸ δεύτερον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως νὰ εὕρωμεν πηλίκον τι ἀκριβές· ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιςος κοινὸς διαιρέτης.

## Περὶ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

§ 54. Καθὼς ὁποιονδήποτε σῶμα δυνάμεθα νὰ τὸ χωρίσωμεν εἰς ὅσα μέρη θέλομεν, οὕτω καὶ μίαν μονάδα εἰμποροῦμεν νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς μέρη, καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ λάβωμεν ὅσα θέλομεν. Τὰ μέρη ταῦτα τῆς μονάδος ὀνομάζονται κλάσματα. Οὕτως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς δύο μέρη, ἕκαςον μέρος εἶναι τὸ ἥμισυ· θέλει εἶναι τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον, κτλ., ἐὰν ἡ μονὰς διαιρῆται εἰς τρία, τέσσαρα, πέντε, κτλ. μέρη.

Κάθε κλάσμα ἐκφράζεται συνήθως διὰ δύο ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους χωρίζομεν διὰ μιᾶς γραμμῆς, καὶ τὸν μὲν ἕνα γράφομεν ἄνω, τὸν δὲ ἄλλον κάτω τῆς γραμμῆς· οὕτω τὰ κλάσματα, ἥμισυ, ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον, ἓν πέμπτον, τρία τέταρτα, δύο

τρίτα, γράφονται $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. Ὁ κάτω ἀριθμὸς ὅστις ὀνομάζεται παρονομαστὴς, σημαίνει εἰς πόσα μέρη διαιρεῖται ἡ μονὰς, καὶ ὁ ἄνω, ὅστις ὀνομάζεται ἀριθμητὴς, παριστάνει πόσα ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη λαμβάνομεν. Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τὸ ψηφίον 4 τοῦ παρονομαστοῦ σημαίνει ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς 4 μέρη, καὶ τὸ 3 τοῦ ἀριθμητοῦ, ὅτι ἐλάβαμεν 3 ἀπὸ τὰ 4 μέρη εἰς τὰ ὁποῖα ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς ὀνομάζονται ἀκόμη καὶ ὅροι τοῦ κλάσματος.

§ 55. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἦναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστὴν, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα· οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$ τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς πέντε ἴσα μέρη, καὶ ὅτι ἐλάβαμεν 5 ἀπ' αὐτὰ τὰ μέρη, εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναί ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Ὅταν δὲ ὁ παρονομαστὴς ἦναι μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμητοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος· οὕτω τὸ $\frac{3}{4}$ σημαίνει ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς 4 μέρη, καὶ ὅτι ἐλάβαμεν μόνον τρία ἀπ' αὐτὰ τὰ μέρη.

Τέλος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἦναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαςοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τῆς μονάδος· τοιοῦτον εἶναι τὸ $\frac{5}{3}$, ὅπου τὰ μέρη τῆς μονάδος εἶναι τρία, καὶ ἡμεῖς ἐλάβαμεν 5, ἡ μίαν ὁλόκληρον μονάδα πλέον $\frac{2}{3}$· τὸ ὁποῖον εἶναι φανερὸν, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{3}$ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο κλάσματα $\frac{3}{3}$ πλέον $\frac{2}{3}$ ἢ 1 πλέον $\frac{2}{3}$.

Δύο εἰδῶν κλάσματα ὑπάρχουν, τὰ κοινὰ καὶ τὰ δεκαδικά.

## Περὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων.

§ 56. Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς σημαίνει εἰς πόσα μέρη ἡ μονὰς διαιρεῖται, εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅσον ὁ παρονομαστὴς οὗτος αὐξάνει, τόσον τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται· οὕτω τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$, ἐξακολουθοῦν ὁλονὲν νὰ ἐλαττοῦνται, ἐπειδὴ τὸ πέμπτον ἑνὸς πράγματος εἶναι μικρότερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δωδέκατον, μικρότερον τοῦ πέμπτου. Τὰ κλάσματα λοιπὸν τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν, εἶναι τόσον πλέον μικρότερα ὅσον ὁ

παρονομαστὴς εἶναι μεγαλήτερος, καὶ ἀντιστρόφως τόσον μεγαλήτερα, ὅσον ὁ παρονομαστὴς μικρότερος.

Ὡσαύτως ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς δεικνύει πόσα ἀπὸ τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἐδιαιρέσαμεν τὴν μονάδα, λαμβάνομεν, τὸ κλάσμα πρέπει ν' αὐξάνῃ ὅσον ὁ ἀριθμητὴς αὐξάνει. Εἰς τὰ κλάσματα π.χ. $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{12}$, βλέπομεν ὅτι πρᾶγμά τι ἐδιαιρέθη εἰς 12 μέρη, καὶ ὅσον περισσότερα ἀπὸ τὰ 12 ταῦτα μέρη ἂν λάβωμεν, τόσον καὶ μεγαλήτερον κλάσμα ἔχομεν· ὅτι ἐὰν λάβωμεν 9, ἔχομεν κλάσμα πολὺ μεγαλήτερον παρ' ἂν λάβωμεν 5 ἢ 1 μόνον. Ὅθεν τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, εἶναι τόσον πλέον μεγαλήτερα ἢ μικρότερα, ὅσον ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος.

§ 57. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων εὐκόλως συνάγομεν ὅτι, ὅταν αὐξάνωμεν ἢ ἐλαττόνωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος, αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται τὸ κλάσμα, ἐπειδὴ $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{3}{8}$, καὶ $\frac{3}{7}$ μικρότερον τοῦ $\frac{4}{7}$, ἀλλ' ἐξ ἐναντίας αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται τὸ κλάσμα, ὅταν ἐλαττόνωμεν ἢ αὐξάνωμεν τὸν παρονομαστήν του· $\frac{3}{6}$ π.χ. εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{3}{12}$, καὶ $\frac{4}{7}$ μικρότερον τοῦ $\frac{4}{5}$. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι

| | | |
|---|---|---|
| τὸ κλάσμα | αὐξάνει ἢ | πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ, |
| | πολλαπλασιάζεται, | ἢ διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ. |
| | ἐλαττοῦται ἢ | πολλαπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ, |
| | διαιρεῖται, | ἢ διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ. |

Ὅθεν διὰ νὰ καταστήσωμεν κλάσμα τι 2, 3, ἢ 4 φορὰς μεγαλήτερον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητήν του, ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστήν του μὲ 2, 3, 4· διὰ νὰ τὸ κάμωμεν δὲ μικρότερον, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν του μὲ 2, 3, 4.

§ 58. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος διά τινος ἀριθμοῦ, τοῦ 3 π.χ. τὸ κλάσμα γίνεται τρεῖς φορὰς μεγαλήτερον, ὡς εἴδομεν· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ὡσαύτως τὸν παρονομαστήν του μὲ 3, γίνεται 3 φορὰς μικρότερον·

ὅθεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν συγχρόνως τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος, ἡ τιμή του δὲν μεταβάλλεται. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{9}{12}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ $\frac{3}{4}$· Εἰς τὸ πρῶτον διαιρεῖται μὲν ἡ μονὰς εἰς 12 μέρη ἢ εἰς 4 ἐπὶ 3, ἀλλ' ἐπίσης λαμβάνομεν 9 ἐκ τῶν μερῶν τούτων, ἢ 3 ἐπὶ 3· τὰ δύο κλάσματα εἶναι λοιπὸν ἰσοδύναμα.

Ἀντιστρόφως, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ τιμή του δὲν μεταβάλεται· τοὐντι βλέπομεν εὐκόλως ὅτι $\frac{12}{16}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{3}{4}$, διότι 12 καὶ 16 ἐδιαιρέθησαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

§ 59. Εἴπομεν (55) ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα μεγαλήτερα τῆς μονάδος, καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ $\frac{38}{7}$, $\frac{48}{5}$. Διὰ νὰ ἐξάξωμεν τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους εἰς τὰ κλάσματα ταῦτα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον εἶναι ὁ περιεχόμενος ὁλοσχερὴς εἰς τὸ κλάσμα, καὶ τὸ κατάλοιπον ὁ ἀριθμητὴς ἄλλου κλάσματος, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ὁ τοῦ προτεθέντος κλάσματος. Οὕτω τὸ $\frac{38}{7}$ δίδει πηλίκον 5, καὶ κατάλοιπον 3, ἢ 3 ἕβδομα· ἑπομένως τὸ ὅλον κλάσμα ἰσοδυναμεῖ μὲ $5\frac{3}{7}$. Ὡσαύτως τὸ $\frac{48}{5}$ δίδει $9\frac{3}{5}$.

Εἶναι ἐπίσης ἀναγκαῖον ἐνίοτε νὰ φέρωμεν ὁλοσχερῆ τινα ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν δεδομένον τινὰ ἀριθμόν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁλοσχερῆ μὲ τὸν δεδομένον παρονομαστὴν, καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος. Ἔστω π.χ. ν' ἀνάξωμεν τὸν ἀριθμὸν 7 εἰς πέμπτα. Εἰξεύρομεν ὅτι (55) $\frac{5}{5}$ παριστάνει τὴν μονάδα, ἢ μᾶλλον ἑκάστη μονὰς τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{5}{5}$, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν 7 μονάδας, πρέπει τὸ $\frac{5}{5}$ νὰ γένῃ 7 φορὰς μεγαλήτερον· τὸ ὁποῖον γίνεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητήν του μὲ 7 (57)· ὅθεν $\frac{35}{5}$ εἶναι τὸ ζητούμενον κλάσμα.

§ 60. Ἐκτελοῦμεν καὶ ἐπὶ τῶν κλασμάτων τὰς ἰδίας ἐργασίας τὰς ὁποίας καὶ ἐπὶ τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν· πλὴν ἀπαντῶμεν συχνὰ κλάσματα τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι πολλὰ μεγάλοι, ἑπομένως διὰ νὰ καταστήσωμεν ἁπλουστέρους τοὺς λογα-

ρισμούς, πρέπει νὰ ἰδῶμεν πῶς φέρονται τὰ κλάσματα εἰς τὴν ἁπλουστέραν των μορφήν.

Διὰ νὰ φέρωμεν κλάσμα τι εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφήν, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην (52, 53) μεταξὺ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἐὰν π.χ. ἐκτελέσωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην ἐπὶ τοῦ κλάσματος $\frac{637}{143}$, εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως (53), ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος τούτου εἶναι 13, καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν ἕκαστον ὅρον διὰ 13, λαμβάνομεν $\frac{49}{11}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ εἰς τὴν ὁποίαν τὸ προτεθὲν κλάσμα ἄγεται.

Τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα εἰς τοὺς δύο των ὅρους μηδενικὰ φέρονται ἀμέσως εἰς τὴν ἁπλουστέραν των μορφὴν ἐὰν ἐξαλείψωμεν ἴσον ἀριθμὸν μηδενικῶν ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἀπὸ τὸν παρονομαστήν.

Ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, τὸ κλάσμα τότε εἶναι ἀνάγωγον (53).

§ 61. Ἐργασίαι τινὲς ἀπαιτοῦν ὥστε τὰ κλάσματα νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Διὰ νὰ φέρωμεν κατὰ πρῶτον π.χ. τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, καὶ εὑρίσκομεν τὰ $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{9}{12}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$, καθὼς εὐκόλως πληροφορούμεθα ἐὰν τὰ φέρωμεν εἰς τὴν ἁπλουστέραν των μορφὴν (60).

§ 62. Ἐὰν ἔχωμεν ὑπὲρ τὰ δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦτον ἐπὶ τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον $\frac{2}{3}$ μὲ τὸ γινόμενον 20 τῶν παρονομαστῶν 4 καὶ 5 τῶν δύο ἄλλων κλασμάτων, ἔπειτα $\frac{3}{4}$ μὲ τὸ γινόμενον 15 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 5, καὶ τέλος $\frac{4}{5}$ μὲ τὸ γινόμενον 12 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 4, καὶ λαμβάνομεν τὰ τρία ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{40}{60}$,

$\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ὅταν ἔχωμεν πολλὰ κλάσματα, δυνάμεθα εἰς μερικὰς περιστάσεις νὰ συντομεύσωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην. Ζητοῦντες π. χ. νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{17}{24}$, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἄνω τρόπον, κοινὸν παρονομαστὴν 8640· συντημεύομεν ὅμως πολὺ τὴν ἐργασίαν, ἐὰν εὕρωμεν ἀριθμόν τινα διαιρετὸν ἀκριβῶς δι᾽ ὅλων τῶν παρονομαστῶν (α), ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι 120 ὅστις θέλει εἶναι κοινὸς παρονομαστής. Ὅθεν ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δι᾽ ὅλων τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον κλάσμα μὲ τὸ πηλίκον 30, τὸ δεύτερον μὲ τὸ 20, τὸ τρίτον μὲ τὸ 8, καὶ τὸ τέταρτον μὲ τὸ 5, λαμβάνομεν τὰ κλάσματα $\frac{90}{120}$, $\frac{100}{120}$, $\frac{112}{120}$, $\frac{85}{120}$.

## Περὶ Προσθέσεως τῶν κλασμάτων.

§ 63. Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητάς των, καὶ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν· οὕτω τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7}$, τὸ δὲ τῶν $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ εἶναι $\frac{133}{60}$.

Ὅταν τὰ κλάσματα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τὰ φέρομεν πρῶτον, ὡς εἰξεύρομεν (61, 62), καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομεν ὡς ἀνωτέρω.

Τέλος ἐὰν ὁμοῦ μὲ τὰ κλάσματα ἦναι καὶ ὁλοσχερεῖς, φέρομεν τοὺς ὁλοσχερεῖς εἰς κλάσματα, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ὡς ἀνωτέρω, ἢ προσθέτομεν χωριστὰ τὰ κλάσματα, καὶ χωριστὰ τοὺς ὁλοσχερεῖς. Οὕτω διὰ νὰ προσθέσωμεν 4 $\frac{2}{3}$ εἰς 3 $\frac{3}{4}$, φέρομεν τοὺς ὁλοσχερεῖς εἰς κλάσματα ἔχοντα παρονομα-

---

(α) Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ ἦναι ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς ἐὰν διαιρῆται δι᾽ ὅλων τῶν ἄλλων· ἐὰν δὲν διαιρῆται, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν μὲ 2, 3, 4... ἕως νὰ εὕρωμεν γινόμενον διαιρετὸν δι᾽ ὅλων τῶν παρανομαστῶν.

τὴν τὸν 12· προσθέτομεν αὐτὰ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ καὶ ἔχομεν $\frac{56}{12}$ καὶ $\frac{45}{12}$, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι $\frac{101}{12}$ ἴσον μὲ 7 $\frac{17}{12}$. Ἢ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, προσθέτομεν τοὺς ὁλοσχερεῖς καὶ ἔπειτα τὰ κλάσματα καὶ εὑρίσκομεν ἐπίσης 7 $\frac{17}{12}$ ἴσον μὲ 8 $\frac{5}{12}$.

## Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

§ 64. Ὅταν τὰ κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἀφαιροῦμεν τὸν μικρότερον ἀριθμητὴν ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, διαιροῦμεν τὴν διαφορὰν διὰ τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ, καὶ λαμβάνομεν τὸ κατάλοιπον. Ἐὰν π. χ. ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{8}{12}$, μένει $\frac{3}{12}$.

Ὅταν τὰ κλάσματα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, τὰ φέρομεν ὡς εἴπομεν εἰς αὐτόν· ἐὰν δὲ ζητῆται ν' ἀφαιρέσωμεν πολλὰ κλάσματα ἀπὸ ἕν, ἀθροίζομεν αὐτὰ, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κεφαλαίου των ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου κλάσματος.

Ὅταν ὁμοῦ μὲ τὰ κλάσματα ἦναι καὶ ὁλοσχερεῖς, λαμβάνομεν χωριστὰ τὴν διαφορὰν τῶν κλασμάτων καὶ τῶν ὁλοσχερῶν· οὕτω, ἐὰν ἀπὸ 6 $\frac{3}{8}$ ἀφαιρέσωμεν 3 $\frac{1}{8}$, λαμβάνομεν κατάλοιπον 3 $\frac{2}{8}$.

Τέλος ἐὰν τὸ δεύτερον κλάσμα τὸ ὁποῖον συνοδεύεται μὲ ὁλοσχερῆ, ἦναι μεγαλήτερον ἐκείνου ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν, δανειζόμεθα μίαν ἢ πολλὰς μονάδας, τὰς ὁποίας τρέπομεν εἰς κλάσμα (53). Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν π. χ. 3 $\frac{4}{5}$ ἀπὸ 7 $\frac{1}{5}$, δανειζόμεθα ἀπὸ τὸν 7 μίαν μονάδα ἰσοδυναμοῦσαν μὲ $\frac{5}{5}$, τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ $\frac{1}{5}$, καὶ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 6 $\frac{6}{5}$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦμεν 3 $\frac{4}{5}$ καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 3 $\frac{2}{5}$.

## Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων.

§ 65. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ μὲ 2, ἢ μὲ ἄλλους λόγους, διὰ νὰ τὸ κάμωμεν δύο φορὰς μεγαλήτερον, πολλαπλασιάζομεν (57) τὸν ἀριθμητήν του μὲ 2 καὶ λαμβάνο-

μεν γινόμενον $\frac{8}{5}$. ἀλλ' ἐὰν ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπίσης τὸν ἀριθμητὴν 4 μὲ τὸν ἀριθμητὴν 2· πλὴν ἐπειδὴ δὲν ζητεῖται νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ὁλοσχερῆ 2 ἀλλὰ μὲ τὸ $\frac{2}{3}$, τὸ γινόμενον $\frac{8}{5}$ τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν εἶναι 3 φορὰς μεγαλήτερον· ὅθεν διὰ νὰ τὸ καταστήσωμεν 3 φορὰς μικρότερον, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν του 5 μὲ 3 (57), καὶ ἔχομεν τὸ καθαυτὸ γινόμενον $\frac{8}{15}$. Ὁ ἀριθμητὴς λοιπὸν τοῦ κλάσματος τούτου εἶναι τὸ γινόμερον τῶν δύο ἀριθμητῶν 4 καὶ 2 τῶν κλασμάτων $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 5 καὶ 3. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν λοιπὸν κλάσμα μὲ κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν.

§. 66. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ κλάσματα μεταξύτων, πολλαπλασιάζομεν δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν μὲ τὸ τρίτον, μετὰ ταῦτα τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων μὲ τὸ τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὅταν ὁμοῦ μὲ τὰ κλάσματα ὑπάρχουν καὶ ὁλοσχερεῖς, ἁπλούστερον εἶναι ν' ἀνάξωμεν τοὺς ὁλοσχερεῖς τούτους εἰς κλάσματα (59), καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐργασίαν ὡς ἀνωτέρω. Οὕτως οἱ δύο ἀριθμοὶ $6\frac{3}{8}$ καὶ $5\frac{3}{4}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{51}{8}$ καὶ $\frac{23}{4}$. τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{1173}{32}$ ἢ 36 καὶ $\frac{19}{32}$.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 16 μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν 16 μὲ τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ κλάσματος, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον 48 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 12, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 16 ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Τῷόντι τὸ τέταρτον τοῦ 16 εἶναι 4, τὸ ὁποῖον ἀφοῦ ληφθῇ τρίς, δίδει 12.

## Περὶ Διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

§ 67. Ἔστω π.χ. νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ διὰ 2. Ἐπειδὴ εἴδομεν (57) ὅτι τὸ κλάσμα διαιρεῖται, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του, ἀρκεῖ εἰς ταύτην τὴν περίςασιν

πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν 4 μὲ 2 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{3}{4}$ διὰ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{3}{8}$.

Ἔστω ἤδη νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{3}{4}$ μὲ ἄλλο τὸ $\frac{2}{5}$· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ πρώτου μὲ τὸν ἀριθμητὴν 2 τοῦ δευτέρου, λαμβάνομεν ὡς ἀνωτέρω πηλίκον $\frac{3}{8}$· ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ζητεῖται νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\frac{3}{4}$ μὲ 2, ἀλλὰ μὲ $\frac{2}{5}$, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸν παρονομαστὴν 4 μὲ 2, ἐκαταστήσαμεν τὸ πηλίκον πεντάκις μικρότερον, ἀνάγκη εἶναι νὰ τὸ κάμωμεν πεντάκις μεγαλήτερον πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ πρώτου, μὲ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ δευτέρου· κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον λαμβάνομεν πηλίκον $\frac{15}{8}$.

Ὅθεν διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ μὲ τὸ $\frac{2}{5}$, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ πρώτου μὲ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ δευτέρου, καὶ τὸν ἀριθμητὴν 2 τοῦ δευτέρου μὲ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ πρώτου· διὰ νὰ διαιρέσωμεν λοιπὸν ἓν κλάσμα δι' ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μὲ τοὺς δύο ὅρους ἀντεστραμμένους τοῦ δευτέρου.

§ 68. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ὁλοσχερῆ 6 διὰ $\frac{2}{3}$, ἀκολουθοῦμεν τὸν αὐτὸν κανόνα, ἀφοῦ πρῶτον τρέψωμεν τὸν ὁλοσχερῆ εἰς κλάσμα ἔχον τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὁποῖον ἔχει καὶ τὸ κλάσμα διὰ τοῦ ὁποίου διαιροῦμεν· εἰς τὸ προτεθὲν λοιπὸν παράδειγμα, πολλαπλασιάζομεν $\frac{18}{3}$, μὲ $\frac{3}{2}$ ἢ μὲ $\frac{2}{3}$ ἀντεστραμμένον, καὶ λαμβάνομεν $\frac{54}{6}$ ἢ 9. Ἡ διαίρεσις ὅμως αὕτη ἐκτελεῖται ἁπλούστερα ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁλοσχερῆ 6 μὲ τὸν παρονομαστὴν 3, καὶ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 18 διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 2.

Ὅταν ὁμοῦ μὲ τὰ κλάσματα ἦναι καὶ ὁλοσχερεῖς, φέρομεν τοὺς ὁλοσχερεῖς τούτους εἰς κλάσματα, προσθέτομεν αὐτὰ εἰς τὸ κλάσμα εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολλὰ κλάσματα τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου, τρία π. χ., διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὰ δύο πρῶτα, ἔπειτα θεωροῦμεν τὸ πηλίκον τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς νέον κλάσμα,

διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ πηλίκον τῶν τριῶν τούτων κλασμάτων.

## Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 69. Εἰς τὴν ἀρίθμησιν (4) ἐσυμφωνήσαμεν ὥστε ὅλα τὰ ψηφία τὰ ὁποῖα γράφομεν πρὸς τ' ἀριστερὰ τῶν μονάδων, νὰ ἔχουν τιμὴν δεκάκις μεγαλητέραν· ἢ τὸ πρῶτον πρὸς ἀριστερὰ ψηφίον τῶν μονάδων νὰ παριστάνῃ δεκάδας, τὸ δεύτερον ἑκατοντάδας, τὸ τρίτον χιλιάδας, κτλ. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐκφράζομεν ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸ μᾶλλον αὐξανομένους. Ἀκολουθοῦντες τὸν ἴδιον τρόπον, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν κλάσματα τῆς μονάδος ἐπὶ μᾶλλον ἐλαττούμενα· ἢ κλάσματα τῆς μονάδος δεκάκις ἐλαττούμενα, θέτοντες διαδοχικῶς πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν μονάδων τὰ ψηφία, καὶ καλοῦντες τὸ πρῶτον μετὰ τὰς μονάδας ψηφίον δέκατα, τὸ δεύτερον ἑκατοστά, τὸ τρίτον χιλιοστά, καὶ οὕτω καθεξῆς.

§ 70. Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰ κλάσματα ταῦτα τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν δεκαδικά, ἀπὸ τοὺς πρὸς τ' ἀριστερὰ τῶν μονάδων κειμένους ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς, θέτομεν μίαν ὑποστιγμὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν μονάδων, καὶ συμφωνοῦμεν ὥστε ὅλα τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποστιγμῆς ταύτης ψηφία, νὰ παριστάνουν κλάσματα δεκαδικά, ἢ μέρη τῆς μονάδος ἐλαττούμενα ἐπὶ μᾶλλον δεκάκις.

Οὕτω διὰ νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 18 καὶ 2 δέκατα, θέτομεν κατὰ πρῶτον τὰς 18 μονάδας, ἔπειτα μίαν ὑποστιγμὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 8, καὶ τέλος τὸ 2 τὸ ὁποῖον εἰς ταύτην τὴν θέσιν ἔχει τιμὴν δεκάκις μικροτέραν· ὅθεν 18,2 παριστάνει πραγματικῶς 18 μονάδας καὶ 2 δέκατα τῆς μονάδος.

Εὐκόλως ἤδη βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3,24· 6,425· 5,6734 ἀπαγγέλλονται· 3 μονάδες καὶ 24 ἑκατοστά· 6 μονάδες καὶ 425 χιλιοστά· 5 μονάδες καὶ 6734 δεκάκις χιλιοστά. Τῳόντι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, καθὼς καὶ ὁ προηγούμενος, ἰσοδυναμοῦν μὲ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς $18\frac{2}{10}$ · $3\frac{24}{100}$ · $6\frac{425}{1000}$ $5\frac{6734}{10000}$·

Ὅθεν διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πρέπει κατὰ

πρῶτον ν' ἀναγνώσωμεν τὰ πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς ὑποστιγμῆς κείμενα ψηφία, ἔπειτα τὰ πρὸς τὰ δεξιά, καὶ νὰ δώσωμεν εἰς ταῦτα παρονομαστήν, τὴν μονάδα μὲ τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποστιγμῆς ταῦτα ψηφία.

§ 71. Ὅταν λοιπὸν εὑρίσκεται ἓν μόνον ψηφίον πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποστιγμῆς, ὀνομάζεται δέκατα, ὅταν δύο ἑκατοστά, ὅταν τρία, τέσσαρα, πέντε ἢ ἕξ, κτλ. χιλιοστά, δεκάκις χιλιοστά. ἑκατοντάκις χιλιοστά, ἑκατομμυριοστά, κτλ.

Ὅταν τὰ κλάσματα δὲν συνοδεύωνται μὲ ὁλοσχερεῖς, θέτομεν ἀντ' αὐτῶν ἓν μηδενικόν, καὶ μετ' αὐτὸ μίαν ὑποστιγμήν, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν δεκαδικῶν· οὕτω 0,35 σημαίνει ἁπλῶς 35 ἑκατοστά.

Καθὼς πρὸς τ' ἀριστερὰ ὁλοσχεροῦς τινος ἀριθμοῦ εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν πολλὰ μηδενικὰ χωρὶς ν' ἀλλάξωμεν τὴν τιμήν του, οὕτω δυνάμεθα καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικοῦ τινος κλάσματος νὰ γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικὰ χωρὶς ἡ τιμή του νὰ μεταβληθῇ· 0,325 καὶ 0,325000 ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν, 325 χιλιοστά.

§ 72. Ἔστω ἤδη νὰ γράψωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα 4 ἑκατοστὰ καὶ 3 χιλιοστά. Εἰς τὸ πρῶτον, τὸ 4 εἶναι ἑκατοστά, καὶ πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν τάξιν μετὰ τὴν ὑποστιγμήν· πλήν, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουν δέκατα, πρέπει, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν σχετικὴν τιμὴν τοῦ 4, νὰ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν, ἓν μηδενικόν, καὶ νὰ γράψωμεν 0,04. Εἰς τὸ δεύτερον, ἐπειδὴ λείπουν τὰ δέκατα καὶ τὰ ἑκατοστά, πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν των μηδενικά, τὸ δὲ 3 εἰς τὴν τάξιν τῶν χιλιάδων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον 0,003. Ὅταν λοιπὸν γράφωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμόν, πρέπει, ἀντὶ τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν, χιλιοστῶν, κτλ. τὰ ὁποῖα λείπουν, νὰ θέτωμεν μηδενικά, καὶ νὰ γράφωμεν τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον εἰς τὴν τάξιν τὴν ὁποίαν ἡ ἀπαγγελία του παριστάνει. Τὸ αὐτὸ ἀκολουθοῦμεν καὶ ὅταν τὸν ἀπαγγέλλωμεν· καὶ βλέπομεν ὅτι 0,00056, 0,0000007, 0,03005, ἀπαγγέλλονται 56 ἑκατοντάκις χιλιοστά, 7 δεκάκις ἑκατομμυριοστά, 3005 ἑκατοντάκις χιλιοστά.

## Περὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 73. Ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ ἡ τῶν ὁλοσχερῶν (14)· καὶ καθὼς ἐκεῖ θέτομεν τὰς μονάδας ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας ὑπὸ τὰς δεκάδας κτλ., ἐνταῦθα πρέπει νὰ θέτωμεν τὰ δέκατα ὑπὸ τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστὰ ὑπὸ τὰ ἑκατοστὰ, κτλ., καὶ νὰ φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων ὅσας μονάδας τὸ κεφάλαιον τῆς στήλης τῶν δεκάτων δίδει. Ἔστωσαν τρία παραδείγματα τῆς προσθέσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

| | | |
|---|---|---|
| 0,203 | 0,425 | 3,2004 |
| 0,12 | 0,69432 | 2,00025 |
| 0,364 | 0,4 | 4,9 |
| 0,2 | 0,24 | 7,364 |
| 0,837 | 1,75932 | 17,46465 |

§ 74. Ἐφαρμόζομεν τοὺς κανόνας τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν (16) εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, προσέχοντες πάντοτε νὰ θέτωμεν τὰ κλάσματα τῆς αὐτῆς μονάδος εἰς τὰς αὐτὰς στήλας· δανειζόμεθα ἐπίσης ἀπὸ τὰ πρὸς τ' ἀριστερὰ ψηφία, καὶ ἀπὸ τὰς μονάδας, ὅταν τὰ δέκατα δὲν ἀρκοῦν.

Παραδείγματα.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,4645 | 7,42485 | 6,47000 | 5,00000 |
| 3,7321 | 3,24 | 2,28984 | 1,28738 |
| 0,7324 | 4,18485 | 4,18016 | 3,71262 |

Εἰς τὸ πρῶτον δὲν ἀπαντῶμεν κάμμίαν δυσκολίαν· εἰς τὸ δεύτερον, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 3,24 ἔχει ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν ἄλλον, γράφομεν ἁπλῶς τὰ περιπλέον αὐτοῦ ψηφία εἰς τὸ κατάλοιπον· εἰς τὸ τρίτον, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 6,47 ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἔχει ὀλιγώτερα δεκαδικὰ παρὰ ὁ ἄλλος, τὸν συμπληρόνομεν μὲ μηδενικά· δανειζόμεθα ἔπειτα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον 7 ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ ἀκολούθου μηδενικοῦ· ἀφίνομεν 9

ἐπὶ τοῦ μηδενικοῦ τούτου, καὶ φέρομεν μίαν ἰσοδυναμοῦσαν μὲ 10 εἰς τὴν ἀκόλουθον τάξιν· καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέταρτον τέλος δανειζόμεθα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 5 μίαν μονάδα τὴν ὁποίαν διαμοιράζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εἰς ὅλα τὰ μηδενικὰ τὰ ὁποῖα ἐθέσαμεν εἰς αὐτὸν μετὰ τὴν ὑποστιγμὴν, δι' ὧν λαμβάνει καὶ αὐτὸς ὅσα δεκαδικὰ ἔχει καὶ ὁ 1,28733 τὸν ὁποῖον πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν.

## Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 75. Ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὡς καὶ τῶν ὁλοσχερῶν, χωρὶς νὰ φροντίζωμεν περὶ τῆς ὑποστιγμῆς ἡ ὁποία χωρίζει τοὺς ὁλοσχερεῖς. Πρέπει δὲ μόνον, ὅταν προσθέσωμεν ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα, νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ ὅλου γινομένου ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουν συγχρόνως καὶ οἱ δύο παράγοντες. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουν σαφηνίσει τὰ περὶ τούτων.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,225 | 7,835 | 0,225 | 0,425 |
| 23 | 5,426 | 0,317 | 0,1 |
| 12675 | 47010 | 1575 | 0,0425 |
| 8450 | 15670 | 225 | |
| 97,175 | 31340 | 675 | |
| | 39175 | 0,071325 | |
| | 42,512710 | | |

§ 76. Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ἐπολλαπλασιάσαμεν 4,225 μὲ τὸν ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν 23· πλὴν ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος 4,225 ἰσοδυναμεῖ μὲ 4225 χιλιοστὰ, τὸ δὲ γινόμενον πρέπει νὰ συμφωνῇ μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον (23), πρέπει ἄρα καὶ αὐτὸ νὰ ἦναι χιλιοστά· ὅθεν τὸ γινόμενον τοῦτο παριστάνει -- 97175 χιλιοστὰ, ἢ ἀφοῦ χωρίσωμεν τὸν ὁλοσχερῆ, 97,175.

Εἰς τὸ δεύτερον ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς 7,835 καὶ 5,426 χωρὶς νὰ θεωρήσωμεν τὴν ὑποστιγμήν. Τὸ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐκφράζει χιλιοστὰ, τὸ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπίσης χιλιοστὰ, ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{1000}$ νὰ

πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{1}{1000}$ δίδει γινόμενον $\frac{1}{1000000}$ ἢ ἓν ἑκατομμυριοστόν· ὅθεν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ γινομένου πρέπει νὰ ἐκφράζῃ ἑκατομμυριοστά· ἔχει λοιπὸν ἕξ δεκαδικά, δηλ. ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Τὸ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ γινομένου πρέπει ἀκόμη εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα νὰ ἐκφράζῃ ἑκατομμυριοστά· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸ γινόμενον ἔχομεν 5 μόνον σημαντικὰ ψηφία, πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ γινομένου ἓν μηδενικὸν διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ σχετικὴ τιμὴ τῶν ψηφίων τοῦ κλάσματος, καὶ πρὸ αὐτοῦ μίαν ὑποστιγμὴν, καὶ ἕτερον μηδενικὸν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἐλλείποντος ὁλοσχεροῦς.

Τέλος εἰς τὸ τέταρτον παράδειγμα τὸ κλάσμα 0,425 πολλαπλασιασθὲν μὲ 0,1, ἐπειδὴ ἔδωσε γινόμενον 0,0425, δεικνύει ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα τι δεκαδικὸν μὲ 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001. κτλ., ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τοῦτο τὸ κλάσμα, καὶ πρὸς τ' ἀριστερά του νὰ θέσωμεν πρὸ τῆς ὑποστιγμῆς ἕν, δύο, τρία κτλ. μηδενικά· ἐπειδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα μὲ 0,1 ἢ μὲ 0,01, εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ τὸν κάμωμεν δεκάκις ἢ ἑκατοντάκις μικρότερον.

Ἐὰν ὁμοῦ μὲ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 0,1 ἢ 0,01, εἶναι καὶ ὁλοσχερὴς, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὴν ὑποστιγμὴν πρὸ τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου ψηφίου τοῦ ὁλοσχεροῦς, οὕτως ὁ ἀριθμὸς 3425,32 γίνεται 342,532 ὅταν πολλαπλασιασθῇ μὲ 0,1. ἔπειτα διαδοχικῶς 34,2532· 3,42532· 0,342532, ὅταν πολλαπλασιασθῇ μὲ 0,01· 0,001· 0,0001.

## Περὶ διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 77. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 342,24 διὰ 24, πρέπει πρῶτον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἰσοδυναμεῖ μὲ 34224 ἑκατοστά, καὶ ὅτι ἑπομένως τὸ πηλίκον, ἐπειδὴ παριστάνει τὰς ἰδίας μονάδας τὰς ὁποίας καὶ ὁ διαιρούμενος (50) πρέπει νὰ ἔχῃ ἑκατοστά· ἐὰν λοιπὸν θεωρήσωμεν τοὺς δύο α-

ριθμοὺς 34224 καὶ 24 ὡς ὁλοσχερεῖς, καὶ διαιρέσωμεν τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου, λαμβάνομεν εἰς τὸ πηλίκον ἑκατοστά. Ἔχομεν λοιπὸν 1426 ἑκατοστὰ, ἢ 14 μονάδας καὶ 26 ἑκατοστά· ἀλλὰ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὸν 24 ὡς παριστάνοντα 2400 ἑκατοστὰ, διὰ τοῦ ὁποίου διαιροῦντες εὑρίσκομεν 14 καὶ $\frac{624}{2400}$, τὸ ὁποῖον φέρεται εἰς ἁπλουστέραν μορφὴν (60), ὡς ἰσοδυναμοῦν μὲ 0, 26. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν λοιπὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ὁλοσχεροῦς, ἐξαλείφομεν τὴν ὑποστιγμὴν τοῦ διαιρουμένου, θέτομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικὰ ὅσα δεκαδικὰ ἔχει ὁ διαιρούμενος, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἐργασίαν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ὁλοσχερῶν, τὸ δὲ πηλίκον δὲν λαμβάνει κάμμίαν μεταβολήν.

| | |
|---|---|
| 34224 | 24 |
| 102 | 14,26 |
| 62 | |
| 144 | |
| 00 | |

§ 78. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ ἀριθμὸν δεκαδικὸν μ' ἄλλον ἔχοντα ἐπίσης δεκαδικὰ ψηφία, συμπληρόνομεν διὰ μηδενικῶν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἐκείνου ὅστις ἔχει ὀλιγώτερα, διὰ νὰ λάβωμεν εἰς τὸ πηλίκον μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους· ἐξαλείφομεν τὴν ὑποστιγμὴν καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς, χωρὶς νὰ κάμωμεν κάμμίαν μεταβολὴν εἰς τὸ πηλίκον, ὡς ἐκ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων γίνεται φανερόν.

| | |
|---|---|
| 42,346 | 2,300 |
| 19 346 | 18 $\frac{946}{2300}$ |
| 946 | |

| | |
|---|---|
| 5424,300 | 3,245 |
| 2179 3 | 1671 $\frac{1905}{3245}$ |
| 232 30 | |
| 5 150 | |
| 1 905 | |

| | |
|---|---|
| 734,04 | 10,00 |
| 34 04 | 73,404 |
| 4 04 | |

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ἐσυμπληρώσαμεν μὲ μηδενικὰ τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαιρέτου, εἰς δὲ τὸ δεύτερον τὰ τοῦ διαιρουμένου. Τὸ τρίτον παράδειγμα δεικνύει, ὅτι διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δεκαδικὸν μὲ 10, 100, ἢ 1000, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν πρὸς τ' ἀριστερὰ τὴν ὑποστιγμὴν κατὰ μίαν, δύο ἢ τρεῖς τάξεις, κτλ. ἐπειδὴ κάμνοντες τοῦτο, δίδομεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τιμὴν 10, 100, 1000 φορὰς μικροτέραν.

§ 79. Εἰς τὴν συνήθη διαίρεσιν σπανίως ὁ διαιρέτης περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν διαιρούμενον, καὶ εἴδομεν ὅτι ὡς ἐπιτα-

πλεῖστον μένει κατάλοιπον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος ἔχοντος παρονομαστὴν τὸν ἴδιον διαιρέτην (40), καὶ τὸ ὁποῖον θέτομεν πλησίον τοῦ πηλίκου διὰ νὰ τὸ συμπληρώσωμεν· οὕτω 35 νὰ διαιρεθῇ διὰ 8 δίδει πηλίκον 4 πλέον $\frac{3}{8}$. ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ σκοπὸς τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἶναι νὰ καταστήσῃ τὰ κοινὰ κλάσματα ἁπλούστερα καὶ εὐχρηστότερα, πρέπει νὰ εὕρωμεν τρόπον ὥστε νὰ μεταβάλλωμεν τὰ κοινὰ κλάσματα, διὰ τῶν ὁποίων συμπληροῦται τὸ πηλίκον, εἰς δεκαδικά. Ἰδοὺ ποῖον τρόπον μεταχειριζόμεθα.

Διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον 35 διὰ 8 καὶ λαμβάνομεν ὁλοσχερὲς πηλίκον 4· θέτομεν 4 εἰς τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν, ἀφαιροῦμεν, καὶ λαμβάνομεν κατάλοιπον 3· μεταβάλλομεν ἔπειτα τὰς 3 ταύτας μονάδας εἰς δέκατα προσθέτοντες ἓν μηδενικόν, διότι 3 μονάδες ἢ 30 δέκατα, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό. Ἐπειδὴ ἤδη ὁ νέος διαιρούμενος 30 ἐκφράζει δέκατα, καὶ τὰ πηλίκον παριστάνει μονάδας ὁποίας καὶ ὁ διαιρούμενος (50), ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ 30 ταῦτα δέκατα διὰ 8, λαμβάνομεν εἰς τὸ πηλίκον δέκατα· θέτομεν λοιπὸν 3 δέκατα, ἀφοῦ πρῶτον χωρίσωμεν διὰ μιᾶς ὑποστιγμῆς τὸν ὁλοσχερῆ 4· τρέπομεν τὸ κατάλοιπον 6 δέκατα εἰς 60 ἑκατοστά, καὶ μὲ τὸν νέον τοῦτον διαιρούμενον λαμβάνομεν τὸ ψηφίον 7 τῶν ἑκατοστῶν τοῦ πηλίκου, καὶ κατάλοιπον 4 ἑκατοστὰ τὰ ὁποῖα μεταβάλλομεν ἐπίσης εἰς χιλιοστὰ δι' ἑνὸς μηδενικοῦ· μὲ τὰ 40 ταῦτα χιλιοστὰ εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον 5 τῶν χιλιοστῶν τοῦ πηλίκου, καὶ κατάλοιπον μηδέν, τὸ ὁποῖον μᾶς δεικνύει ὅτι ὁ 8 περιέχεται 4,375 φορὰς εἰς τὸν 35.

| | | |
|---|---|---|
| | 35 | 8 |
| | 3 | 4,375 |
| δέκατα. | 30 | |
| ἑκατοστά. | 60 | |
| χιλιοστά. | 40 | |

§ 80. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ διαιρέσωμεν 2 διὰ 8, ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ μὲ τὰ συνήθη μέσα, ἐπειδὴ ὁ 8 δὲν περιέχεται εἰς τὸν 2· ἐκτελεῖται ὅμως κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἐπειδὴ ὁ 8 δὲν περιέχεται εἰς τὸν 2, καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον δὲν ἔχει ὁλοσχερῆ ἀριθμόν, θέτομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ὁλοσχε-

| | |
|---|---|
| 20 | 8 |
| 40 | 0,25 |
| 0 | |

ροῦς· μετάβάλλομεν τὰς 2 μονάδας εἰς δέκατα, διαιροῦμεν καὶ λαμβάνομεν τὸ ψηφίον 2 τοῦ πηλίκου, καὶ κατάλοιπον 4, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ μεταβληθῇ εἰς ἑκατοστὰ, δίδει τὸ ψηφίον 5 τῶν ἑκατοστῶν τοῦ πηλίκου, 0,25. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἀκριβὴς, διότι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην 8 μὲ τὸ πηλίκον 0,25, εὑρίσκομεν τὸν διαιρούμενον 2.

§ 81. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου δι᾽ οὗ μεταβάλλομεν τὰ κατάλοιπα εἰς δεκαδικὰ, δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν ὅσον θέλομεν εἰς τὴν καθαυτὸ τιμὴν τοῦ πηλίκου, ὅταν ὁ διαιρέτης δὲν περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν διαιρούμενον. Τῳόντι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα (79) τὸ ὁλοσχερὲς πηλίκον 4, δὲν εἶναι ἀκριβὲς, ἐπειδὴ διαφέρει κατὰ 0,375, ἢ πλέον τοῦ τρίτου τῆς μονάδος ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς πηλίκον 4,375. Πρέπει λοιπὸν, διὰ νὰ λάβωμεν πηλίκον ἀκριβὲς, νὰ τρέψωμεν τὰ διαδοχικὰ κατάλοιπα εἰς δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ἕως ὅτου νὰ λάβωμεν κατάλοιπὸν μηδέν.

§ 82. Σπανίως συμβαίνει ὥστε νὰ φθάσωμεν εἴς τι πηλίκον χωρὶς κατάλοιπον· τὰ δὲ δεκαδικὰ τοῦ πηλίκου ψηφία ὡς ἐπιτοπλεῖστον προβαίνουν εἰς τὸ ἐπάπειρον· ἀλλὰ προχωρούντων τῶν ψηφίων τούτων, φθάνομεν εἴς τινα τιμὴν ἡ ὁποία προσεγγίζει ἐπὶ μᾶλλον εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, καὶ ἡ ὁποία διαφέρει ἀπ᾽ αὐτὸ τόσον ὀλίγον, ὥστε ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι σχεδὸν ἀνεπαίσθητος· συνήθως μάλιστα εὐχαριστούμεθα νὰ λάβωμεν εἰς τὸ πηλίκον τινὰ μόνον δεκαδικὰ ψηφία, καὶ νὰ παραλείψωμεν τ᾽ ἄλλα· εἰς ταύτην τὴν περίστασιν λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον προσεγγίζει καὶ ὅτι τὸ σφάλμα εἶναι ἔλασσον τοῦ ἑνὸς δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ, ἢ δεκάκις χιλιοστοῦ, κτλ., καθόσον λαμβάνομεν ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου 1, 2, 3, ἢ 4. Οὕτως ἐὰν διαιρέσωμεν 3 διὰ 8, εὑρίσκομεν πηλίκον ἀκριβὲς 0, 375. Τὸ πηλίκον 0, 3 εἶναι ἐσφαλμένον ἔλασσον τοῦ ἑνὸς δεκάτου, ἐπειδὴ ποτὲ τὰ ἀκόλουθα ψηφία δὲν δύνανται νὰ σχηματίσουν 1 δέκατον· τὸ πηλίκον 0, 37 εἶναι ἐσφαλμένον ἔλασσον ἑνὸς ἑκατοστοῦ, ἐπειδὴ ποτὲ τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν δὲν ὑπερβαίνει τὰ 9 χι-

χιοστά, καὶ δὲν φθάνει εἰς τὴν τιμὴν ἑνὸς ἑκατοστοῦ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

§ 83. Δυνάμεθα λοιπὸν εὐκόλως ν' ἀνάξωμεν κοινόν τι κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ ἐὰν ὁ διαιρέτης δὲν περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν διαιρούμενον, νὰ τρέψωμεν διαδοχικῶς τὰ κατάλοιπα εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ, χιλιοστὰ, κτλ., προσθέτοντες εἰς ἕκαστον ἓν μηδενικὸν, διὰ νὰ λάβωμεν τὰ ψηφία τῶν δεκάτων, τῶν ἑκατοστῶν καὶ τῶν χιλιοστῶν τῶν δεκαδικῶν τοῦ πηλίκου· οὕτω τὸ $\frac{7}{250}$ ἀγόμενον κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, δίδει 0, 028. Ἐθέσαμεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἐπειδὴ 250 δὲν περιέχεται εἰς 7, ἐπροσθέσαμεν καὶ ἄλλο διὰ νὰ λάβωμεν 70 δέκατα εἰς τὸν διαιρούμενον· πλὴν ἐπειδὴ ὁ 70 δὲν περιέχει ἀκόμη τὸν 250, ἐθέσαμεν καὶ ἓν ἄλλο μηδενικὸν εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων τοῦ πηλίκου, ἔπειτα ἐτρέψαμεν 70 εἰς ἑκατοστὰ, ἐδιαιρέσαμεν τὰ 700 ταῦτα ἑκατοστὰ διὰ 250, ἐτρέψαμεν τέλος τὸ κατάλοιπον εἰς χιλιοστὰ, καὶ ἐλάβαμεν τὰ δύο σημαντικὰ ψηφία τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου.

§ 84. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ τρέψωμεν δεκαδικόν τι κλάσμα εἰς ἁπλοῦν κοινόν· πρέπει ὅμως ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, καὶ ὁ παρονομαστής του, ὅστις εἶναι ἡ μονὰς μὲ τόσα μηδενικὰ ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμητὴς (70), νὰ ἔχουν ἕνα κοινὸν διαιρέτην. Οὕτω τὰ δεκαδικὰ κλάσματα 0, 5, 0, 25, 0, 20 ἢ $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{20}{100}$, ἀνάγονται ἀμέσως εἰς τὰς ἁπλουστάτας των μορφὰς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$, ἐνῷ τὰ κλάσματα 0, 27, 0, 379, 0, 3 ἀγόμενα εἰς κοινὰ, δὲν φέρονται εἰς ἁπλουστέραν μορφήν.

## Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

§ 85. Ὅταν διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἐζητήσαμεν πόσον ἀριθμός τις ὑπερβαίνει ἄλλον τινὰ, δὲν ἐκάμαμεν ἄλλο εἰμὴ ἐζητήσαμεν τὸν λόγον τοῦ μεγέθους τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Ὡσαύτως ὅταν διὰ τῆς διαιρέσεως ἐζητήσαμεν ποσάκις ἀριθμός τις περιέχεται εἰς ἄλλον, ἐζητήσαμεν τὸν λόγον ὅστις ὑπάρχει μεταξὺ

τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Οὕτω συγκρίνοντες τοὺς ἀριθμοὺς μεταξύ των, εὑρίσκομεν δύο εἰδῶν λόγους, τὸν ἕνα, ὀνομαζόμενον λόγον ἀριθμητικὸν, ἐκφράζοντα τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, καὶ τὸν ἄλλον, ὀνομαζόμενον λόγον γεωμετρικὸν, ἐκφραζόμενον διὰ τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν.

Πᾶς λόγος λοιπὸν σύγκειται ἐκ δύο ὅρων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ὀνομάζεται ἡγούμενος, ὁ δὲ ἄλλος ἑπόμενος.

§ 86. Ὁ ἀριθμητικὸς λόγος παριστάνεται διὰ μιᾶς στιγμῆς θεμένης μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν, ἢ συγκρινομένων ὅρων· οὕτω 6.4 σημαίνει τὸν ἀριθμητικὸν λόγον τοῦ 6 πρὸς 4, ἢ τὴν διαφοράν των 2· ὁ δὲ γεωμετρικὸς διὰ δύο στιγμῶν θεμένων μεταξὺ τῶν δύο ὅρων· οὕτως 8: 2 παριστάνει τὸν γεωμετρικὸν λόγον τοῦ 8 πρὸς 2, ἢ τὸ πηλίκον 4 τοῦ πρώτου διαιρουμένου διὰ τοῦ δευτέρου. Ὁ γεωμετρικὸς λόγος γράφεται ἀκόμη καὶ οὕτω $\frac{8}{2}$, διότι εἴδομεν (40), ὅτι τὰ οὕτω γραφόμενα κλάσματα, παριστάνουν πάντοτε τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

§ 87. Ἡ μεταξὺ δύο ἴσων λόγων γινομένη σύγκρισις ὀνομάζεται ἀναλογία. Οὕτως οἱ δύο ἀριθμητικοὶ λόγοι 6.4 καὶ 9.7, σχηματίζουν ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν, ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον τούτων τῶν λόγων ἡ διαφορὰ, ἢ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸν ἑπόμενον εἶναι 2. Ἀριθμητικὴν ὡσαύτως ἀναλογίαν σχηματίζουν καὶ οἱ δύο οὗτοι λόγοι 7.10 καὶ 5.8, ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸν ἡγούμενον εἶναι 3. Ὅθεν εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὁ λόγος ἐκφράζει ἢ τὴν διαφορὰν τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸν ἑπόμενον, ἢ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸν ἡγούμενον. Πᾶσα ἀριθμητικὴ ἀναλογία παριστάνεται οὕτω 6.4: 9.7, καὶ ἀναγινώσκεται, 6 πρὸς 4, καθὼς 9 πρὸς 7.

§ 88. Παρομοίως ἡ σύγκρισις δύο ἴσων γεωμετρικῶν λόγων δίδει τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν· οὕτως οἱ δύο λόγοι 6: 2 καὶ 21:7 σχηματίζουν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, ἐπειδὴ ὁ 6 διαιρούμενος διὰ 2 δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον ὁποῖον καὶ ὁ 21 διαιρούμενος διὰ 7. Ὑπάρχει λοιπὸν γεωμετρικὴ ἀναλογία ὅταν ὁ ἡγούμενος

διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἑπομένου δίδῃ τὸ αὐτὸ πηλίκον εἰς ἕκαστον λόγον, ἢ ὅταν τὸ πηλίκον τοῦ ἑπομένου διαιρουμένου διὰ τοῦ ἡγουμένου, εἶναι ἀκόμη τὸ αὐτὸ εἰς τοὺς δύο λόγους. Ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία γράφεται οὕτως 6:2:: 21 : 7, καὶ ἀναγινώσκεται, 6 πρὸς 2, καθὼς 21 πρὸς 7.

§ 89. Πᾶσα λοιπὸν ἀναλογία σύγκειται ἐκ δύο λόγων καὶ ἐκ τεσσάρων ὅρων, δηλ. δύο ἡγουμένων, καὶ δύο ἑπομένων. Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ὀνομάζονται οἱ ἄκροι, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος οἱ μέσοι.

Εἰς κάθε ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων· οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν 2.5: 7. 10, τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι 12, καὶ τὸ τῶν μέσων ἐπίσης 12.

Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Τῷόντι εἰς τὴν ἀναλογίαν 7: 21:: 4: 12, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι 7 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 12, ἢ 84· καὶ τὸ τῶν μέσων, 21 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 4, ἢ 84.

§ 90. Ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων, προσδιορίζομεν ἕνα μέσον, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἄλλον μέσον ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων, καὶ ἀντιστρόφως, εὑρίσκομεν ἕνα ἄκρον, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἄλλον ἄκρον ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων. Τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι 12 εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα· ἐὰν ἀπ' αὐτὸ ἀφαιρέσωμεν τὸν μέσον 7, μένει ὁ ἄλλος μέσος 5· ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὸν μέσον 5, λαμβάνομεν τὸν ἄλλον μέσον 7. Τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων εἶναι 12, ἐὰν ἀπ' αὐτὸ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἄκρον 10, μένει ὁ ἄλλος ἄκρος 2.

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 84 τῶν ἄκρων διά τινος τῶν μέσων τοῦ 4 π.χ., εὑρίσκομεν τὸν ἄλλον μέσον 21, καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 84 τῶν μέσων δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων, τοῦ 7 π.χ., εὑρίσκομεν τὸν ἄλλον ἄκρον 12. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ἕνα ἄκρον, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γι-

γόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου, καὶ ἕνα μέσον, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διὰ τοῦ ἄλλου μέσου.

## Περὶ τῆς μεθόδου τῶν Τριῶν.

§ 91. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ἐργασία δι' ἧς εὑρίσκομεν, κατὰ τὰς ἐκτεθείσας ἀνωτέρω ἀρχὰς, τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς εἶναι δεδομένοι ἢ γνωστοί.

Ὑπάρχουν τριῶν εἰδῶν μέθοδοι τῶν τριῶν· ἡ εὐθεῖα, ἡ ἀντίστροφος, καὶ ἡ σύνθετος.

## Περὶ τῆς εὐθείας καὶ ἀντιςρόφου μεθόδου τῶν Τριῶν.

Εἰς τὴν εὐθεῖαν ἢ ἀντίςροφον μέθοδον τῶν τριῶν, ὑπάρχουν πάντοτε μεταξὺ τῶν τριῶν γνωςῶν ὅρων δύο τοῦ ἰδίου εἴδους, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ σχηματίζουν τὸν ἡγούμενον καὶ τὸν ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου· ὁ δ' ἄλλος γνωςὸς ὅρος πρέπει μὲ τὸν ἄγνωςον νὰ σχηματίζουν τὸν ἡγούμενον καὶ τὸν ἑπόμενον τοῦ δευτέρου· οὕτως εἰς τὸ ἀκόλουθον ζήτημα· 12 ἐργάται ἔσκαψαν 32 ὀργυιάς, 18 ἐργάται πόσας θέλουν σκάψει; οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου λόγου εἶναι 12 καὶ 18· ἐὰν καλέσωμεν χ τὸν ἄγνωςον ἀριθμὸν τῶν ὀργυιῶν τὰς ὁποίας οἱ 18 ἐργάται πρέπει νὰ σκάψουν, οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου λόγου θέλουν εἶναι 32 καὶ χ· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀναλογίαν 12: 18:: 32: χ, ἐκ τῆς ὁποίας εὐκόλως συνάγομεν κατὰ τὸν ἄνω κανόνα (90) τὸν ἄγνωςον χ ἴσον μὲ 48, ὅτι δηλ. οἱ 18 ἐργάται σκάπτουν 48 ὀργυιάς.

§ 92. Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν 12 ἐργάται ἔσκαψαν 32 ὀργυιάς, οἱ 18 πρέπει νὰ σκάψουν περισσοτέρας. Εἰς τὸν λόγον 32: χ, ὁ ἄγνωςος χ πρέπει νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ 32, καθὼς καὶ εἰς τὸν λόγον 12: 18, ὁ ἑπόμενος 18 εἶναι μεγαλήτερός τοῦ ἡγουμένου 12, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις ὁ λόγος οὗτος εἶναι εὐθύς, καὶ ἡ μέθοδος ἑπομένως, εὐθεῖα μέθοδος τῶν τριῶν· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας ἐὰν εἴπωμεν, 24 ἄνθρωποι κάμνουν

ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας, 36 εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν κάμει τὸ ἴδιον ἔργον· εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὴν ἀναλογίαν, 24 : 36 :: 12 : χ, ἐπειδὴ εὑρίσκομεν χ ἴσον μὲ 18, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι ἐνῷ 24 ἐργάται κάμνουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας, πῶς δύνανται οἱ 36 νὰ τὸ κάμουν εἰς 18; Ὅθεν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερος τοῦ 12, καὶ ὅτι εὑρίσκεται ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 24 διὰ τοῦ 36· ἡ ἀναλογία πρέπει λοιπὸν νὰ τεθῇ οὕτως· 24 : 36 :: χ : 12, καὶ ἐπομένως νὰ δώσῃ χ ἴσον μὲ 8 ἡμέρας, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθόν.

§ 93. Βλέπομεν λοιπὸν, εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ὅτι ἀντὶ νὰ κρατήσωμεν τὸν εὐθὺν λόγον 12 : χ, τὸν ἀντεστρέψαμεν εἰς χ : 12· τὸ ὁποῖον συνιστᾷ τὴν ἀντίστροφον μέθοδον τῶν τριῶν. Θέλομεν δείξει πότε ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι εὐθεῖα καὶ πότε ἀντίστροφος.

Εἴπομεν ὅτι εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ὑπάρχουν πάντοτε τρεῖς ὅροι γνωστοὶ καὶ εἷς ἄγνωστος (91). Ἐκ τῶν τριῶν γνωστῶν ὅρων δύο εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, καὶ σχηματίζουν τὸν πρῶτον λόγον τῆς ἀναλογίας· ὁ τρίτος γνωστὸς ὅρος ὅστις εἶναι εἴδους διαφορετικοῦ τῶν δύο πρώτων, καὶ ὁ ἄγνωστος ὅστις εἶναι τοῦ ἰδίου εἴδους μὲ τὸν τρίτον, σχηματίζουν τὸν δεύτερον λόγον τῆς ἀναλογίας.

Ἐκ τῶν ὅρων τοῦ πρώτου λόγου, ὁ εἷς εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ ἄλλου· καὶ διὰ νὰ ἦναι ἡ ἀναλογία ἀκριβὴς, πρέπει καὶ ἐκ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου νὰ ἦναι ἐπίσης ὁ εἷς μικρότερος τοῦ ἄλλου.

§ 94. Ἡ δυσκολία νὰ μάθωμεν ἐὰν ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἦναι εὐθεῖα ἢ ἀντίστροφος, συνίσταται λοιπὸν εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν ἐὰν ὁ ἄγνωστος ὅρος τοῦ δευτέρου λόγου ἦναι μικρότερος ἢ μεγαλήτερος τοῦ γνωστοῦ ὅρου τοῦ ἰδίου λόγου· ἀφοῦ ἅπαξ γνωρίσωμεν τοῦτο, κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν.

Ὁ μικρότερος ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι πρὸς τὸν μεγαλήτερον ὅρον τοῦ ἰδίου, ὡς ὁ μικρότερος τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι πρὸς τὸν μεγαλήτερον τούτου τοῦ εἴδους.

Οὕτως εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ § 91, ἔχομεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ ἰδίου εἴδους 12 καὶ 18 ἀνθρώπους· ὁ τρίτος ὅρος εἶναι 32 ὀργυιαί, καὶ ὁ ἄγνωςος πρέπει νὰ ἦναι ὡσαύτως ὀργυιαί. Ὅθεν, ἐὰν 12 ἄνθρωποι σκάπτουν 32 ὀργυιάς, εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ 18 θέλουν σκάψει περισσότερον, ἐπομένως ὁ ἄγνωςος ὅρος χ πρέπει νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ ὅρου 32 τοῦ δευτέρου λόγου. Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν προηγούμενον κανόνα λαμβάνομεν ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν 12 : 18 :: 32 : χ·

§ 95. Ὁμοίως εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ § 92, οἱ ὅροι τοῦ πρώτου λόγου εἶναι 24 καὶ 36 ἄνθρωποι· ὁ δὲ γνωςὸς ὅρος τοῦ δευτέρου λόγου εἶναι 12 ἡμέραι. Πλὴν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἰδῶμεν ὅτι ἐὰν 24 ἄνθρωποι εἰς 12 ἡμέρας ἔκαμαν ἓν ἔργον, οἱ 36 χρειάζονται ὀλιγωτέρας ἡμέρας διὰ νὰ κάμουν τὸ ἴδιον ἔργον. Ὁ ἄγνωςος ὅρος χ πρέπει νὰ ἦναι λοιπὸν μικρότερος τοῦ 12· ἐφαρμόζοντες τὸν ἄνω κανόνα λαμβάνομεν ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν 24 36 :: χ: 12.

Ὅθεν εἰς τὴν εὐθεῖαν ἢ ἀντίςροφον μέθοδον τῶν τριῶν ἓν μόνον πρᾶγμα πρέπει νὰ θεωρήσωμεν, δηλ. νὰ προσδιορίσωμεν ἐὰν ὁ ἄγνωςος ὅρος τοῦ δευτέρου λόγου ἦναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ τὸν γνωςὸν ὅρον τοῦ ἰδίου λόγου, καὶ ἀφοῦ τοῦτο γένῃ, νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν κανόνα τοῦ § 94.

§ 96. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἐὰν ὁ ἄγνωςος ὅρος ἦναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ γνωςοῦ, μεταχειριζόμεθα τὰς ἀκολούθους ἐκφράσεις.

Εἰς τὴν εὐθεῖαν μέθοδον τῶν τριῶν λέγομεν· τὸ πολὺ πρέπει νὰ δώσῃ πολύ· τὸ ὀλίγον, ὀλίγον· δηλ. ὅσον περισσότεροι ἐργάται εἶναι, τόσον καὶ περισσότερον ἔργον κάμνουν· ὀλιγώτεροι ἐργάται, ὀλιγώτερον καὶ τὸ ἔργον· ὅσον περισσότερον διάςημα εἶναι, τόσον περισσότερον καιρὸν χρειαζόμεθα νὰ τὸ διατρέξωμεν· ὅσον ὀλιγώτερον, τόσον καὶ ὀλιγώτερον καιρὸν χρειαζόμεθα· ὅσον περισσοτέρας πραγματείας ἀγοράζομεν, τόσον καὶ περισσότερα χρήματα πληρώνομεν· ὅσον ὀλιγωτέρας, τόσον καὶ ὀλιγώτερα κτλ.

Εἰς τὴν ἀντίςροφον μέθοδον τῶν τριῶν ἐξ ἐναντίας λέγομεν·

τὸ πολὺ πρέπει νὰ δώσῃ ὀλίγον, καὶ τὸ ὀλίγον πολύ. Οὕτως ὅσον περισσότεροι ἐργάται εἶναι διὰ νὰ κάμουν ἔργον τι, τόσον ὀλιγώτερον καιρὸν χρειάζονται· ὅσον ὀλιγώτεροι, τόσον περισσότερον· ὅσον ταχύτερα τρέχομεν, τόσον ὀλιγώτερον καιρὸν χρειαζόμεθα διὰ νὰ διατρέξωμεν δρόμον τινά· καὶ ὅσον ἀργότερα, τόσον περισσότερον καιρὸν χρειαζόμεθα, κτλ.

§ 97. Ἰδού τινα παραδείγματα τῆς εὐθείας καὶ ἀντιςρόφου μεθόδου τῶν τριῶν.

ά 22 κτίςαι ἔκτισαν 56 τετραγωνικὰ μέτρα τοίχου· 30 πόσα τετραγωνικὰ μέτρα τοῦ ἰδίου τοίχου καὶ εἰς τὸν ἴδιον καιρὸν θέλουν κτίσει; ἡ ἀναλογία 22: 30:: 56: χ, δίδει 76,36 μέτρα τετραγωνικά.

Ἡμεροδρόμος τις διέτρεξεν 85 λεύγας εἰς 65 ὥρας· 360 μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα, εἰς πόσας ὥρας θέλει τὰς διατρέξει; Ἐκ τῆς ἀναλογίας 85: 360:: 65: χ, λαμβάνομεν χ ἴσον μὲ 275 ὥρας καὶ σχεδὸν $\frac{1}{3}$.

44 μέτρα τσόχης τιμῶνται 308 δραχμῶν· τῶν 69 τῆς ἰδίας τσόχης πόση εἶναι ἡ τιμή; Ἡ ἀναλογία 44:69::308:χ δίδει τὸν ἄγνωςον χ ἴσον μὲ 483 δραχμάς.

β′ 20 τέκτονες ἐτελείωσαν μίαν ςέγην εἰς 27 ἡμέρας· 36 εἰς πόσας δύνανται νὰ τὴν τελειώσουν; Ἡ ἀναλογία 20: 36:: χ:27 δίδει τὸν ἄγνωςον χ ἴσον μὲ 15 ἡμέρας.

Ἵππος τις τρέχων 1000 μέτρα εἰς ἕκαστον λεπτόν, ἔτρεξε 2 μυριόμετρα· ἐὰν εἰς ἕκαςον λεπτὸν τρέξῃ 898, πόσα μυριόμετρα θέλει τρέξει εἰς τὸν ἴδιον καιρόν; Ἐκ τῆς ἀναλογίας 898: 1000::χ:2 λαμβάνομεν τὸν ἄγνωςον χ ἴσον μὲ 1 μυριόμετρον καὶ 796 μέτρα.

## Περὶ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

§ 98. Ὅταν τὰ προβαλλόμενα ζητήματα, τὰ ὁποῖα λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἔχουν ὑπὲρ τοὺς τρεῖς γνωςοὺς ὅρους, ἡ λύσις των τότε ἐξαρτᾶται ἀπὸ περισσοτέρους παρὰ δύο λόγους. Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτά, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν πολλὰς

ἁπλᾶς μεθόδους τῶν τριῶν· ἡ ἐργασία τότε αὕτη ὀνομάζεται μέθοδος σύνθετος τῶν τριῶν.

Αἱ διάφοροι περιστάσεις τὰς ὁποίας ἓν ζήτημα παρουσιάζει, συμπλεκόμεναι κατὰ τὰς ἀρχὰς τῶν ἁπλῶν μεθόδων τῶν τριῶν, παράγουν μεθόδους τῶν τριῶν συνθέτους, εἰς τὰς ὁποίας ὅλαι αἱ ἁπλαῖ μέθοδοι ἐκ τῶν ὁποίων συνθέτονται εἶναι ἢ εὐθεῖαι, ἢ ἀντίστροφοι, ἢ ἄλλαι εὐθεῖαι, καὶ ἄλλαι ἀντίστροφοι.

§ 99. Ἔστω νὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον ζήτημα· 25 ἐργάται εἰς 2 ἡμέρας ἐτελείωσαν 65 μέτρα ἔργου· 30 ἐργάται εἰς 8 ἡμέρας πόσα μέτρα τοῦ ἰδίου ἔργου θέλουν τελειώσει;

Κατὰ πρῶτον δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν καὶ νὰ λύσωμεν τὸ πρῶτον τοῦτο ζήτημα· 25 ἐργάται ἐτελείωσαν 65 μέτρα ἔργου· 30 ἐργάται, πόσον ἐκ τοῦ ἰδίου ἔργου θέλουν τελειώσει; τὸ ὁποῖον δίδει τὴν ἀναλογίαν 25: 30:: 65: χ, ἢ χ ἴσον μὲ $\frac{30 \text{ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ } 65}{25}$.

Αὕτη εἶναι ἡ ποσότης τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα οἱ 30 ἐργάται τελειόνουν ἐργαζόμενοι τόσας ἡμέρας ὅσας καὶ οἱ 25.

Δυνάμεθα διὰ συντομίαν, νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ σημεῖον $\times$ πρὸς παράστασιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ νὰ παραστήσωμεν $\frac{30 \text{ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ } 65}{25}$, διὰ $\frac{30\times65}{25}$.

Ἐπειδὴ ἤδη οἱ ἐργάται οὗτοι ἠργάσθησαν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἄλλο τοῦτο ζήτημα, ἐργάται τινὲς εἰς 2 ἡμέρας ἐτελείωσαν $\frac{30\times65}{25}$ μέτρα ἔργου, εἰς 8 ἡμέρας πόσα τοῦ ἰδίου ἔργου θέλουν τελειώσει; τὸ ὁποῖον δίδει τὴν ἀναλογίαν 2: 8:: $\frac{30\times65}{25}$: χ, ἢ χ ἴσον μὲ $\frac{8\times30\times65}{2\times25}$, ἢ $65\times\frac{8}{2}\times\frac{30}{25}$ ἴσον μὲ 312 μέτρα.

Εἰς τὸ προτεθὲν ζήτημα αἱ δύο ἀναλογίαι ἦσαν εὐθεῖαι· πρὸς τούτοις οἱ λόγοι 25: 30 καὶ 2: 8 οἱ ὁποῖοι εἶναι εὐθεῖς, εἶναι

τοιοῦτοι καὶ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ χ ἢ εἰς τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον.

§ 100. Ἔςω νὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον ζήτημα. 24 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 30 ἡμέρας ἐτελείωσαν ἓν ἔργον· 72 ἐργαζόμενοι 4 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν τελειώσει τὸ ἴδιον ἔργον;

Παραλείπομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν κατὰ τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται ἠργάζοντο, καὶ λύομεν κατὰ πρῶτον τὸ ζήτημα τοῦτο· 24 ἐργάται ἐτελείωσαν ἓν ἔργον εἰς 30 ἡμέρας· 72 εἰς πόσας θέλουν τελειώσει τὸ ἴδιον ἔργον; Ἐπειδὴ εἶναι περισσότεροι ἐργάται, χρειάζονται καὶ ὀλιγώτερον καιρόν. Ἡ μέθοδος λοιπὸν τῶν τριῶν εἶναι ἀντίςροφος, καὶ δίδει 24: 72:: χ: 30, ἢ χ ἴσον μὲ $\frac{30\times24}{72}$, ὅςις εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν κατὰ τὰς ὁποίας οἱ 72 ἐργάται τελειόνουν τὸ ἔργον.

Μεταβαίνοντες ἤδη εἰς τὸ δεύτερον ζήτημα, λέγομεν· εἰς $\frac{30\times24}{72}$ ἡμέρας ἐργάται τινὲς ἐτελείωσαν ἓν ἔργον ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας θέλουν τελειώσει τὸ ἴδιον ἔργον ἐργαζόμενοι 4 ὥρας τὴν ἡμέραν; Ὅσον ὀλιγωτέρας ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργάζονται, τόσον περισσοτέρας ἡμέρας χρειάζονται, ἐπομένως ἡ μέθοδος εἶναι ἀντίςροφος, καὶ δίδει $4:12::\frac{30\times24}{72}:\chi$· ἢ χ ἴσον μὲ $\frac{12\times30\times24}{4\times72}$, ἢ $30\times\frac{12}{4}\times\frac{24}{72}$, καὶ τέλος χ ἴσον μὲ 30 ἡμέρας· δηλ. οἱ 72 ἐργάται χρειάζονται ἐπίσης 30 ἡμέρας.

§ 101. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ § 99, ἠδυνάμεθα ἐπίσης νὰ εἴπωμεν ὅτι ἐξ ἑνὸς μέρους ἐκτελέσθησαν 65 μέτρα ἔργου, καὶ ὅτι ἐκ τοῦ ἄλλου ἔχομεν τοὺς λόγους.

25: 30 διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν·

2: 8 διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν.

Οἱ περισσότεροι ἐργάται ἐκτελοῦν περισσότερον ἔργον, ἐπομένως ὁ λόγος 25: 30 εἶναι εὐθύς· καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 65 μέτρα μὲ τὸν λόγον τοῦτον, λαμβάνομεν $65\times\frac{30}{25}$ ἢ τὸν ἀ-

ριθμὸν τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα οἱ 30 ἐργάται ἐκτελοῦν εἰς τόσον χαιρὸν, εἰς ὅσον καὶ οἱ 25 τὰ 65 μέτρα.

Ὅσον δὲ περισσοτέρας ἡμέρας ἐργάζονται, τόσον καὶ περισσότερον ἔργον ἐκτελοῦν· ὁ λόγος 2: 8 εἶναι εὐθύς. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν $65 \times \frac{30}{25}$ μὲ τὸν λόγον τοῦτον, λαμβάνομεν $65 \times \frac{30}{25} \times \frac{8}{2}$, ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα οἱ 30 ἐργάται ἐκτελοῦν εἰς 8 ἡμέρας, ὅταν οἱ 25 ἐργάται εἰς 2 ἡμέρας τελειόνουν 65· συνάγομεν λοιπὸν ὡς καὶ προηγουμένως 312 μέτρα.

§ 102. Ὡσαύτως εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ § 100, ἔχομεν ἐξ ἑνὸς μέρους 30 ἡμέρας, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου τοὺς λόγους.

24: 72 διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν·

4: 12 διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν.

Οἱ περισσότεροι ἐργάται εἰς ὀλιγώτερον χαιρὸν τελειόνουν τὸ αὐτὸ ἔργον· ὁ λόγος λοιπὸν 24: 72 εἶναι ἀντίςροφος, καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν μὲ 30 ἔχομεν $30 \times \frac{24}{72}$, ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν κατὰ τὰς ὁποίας οἱ 72 ἐργάται κάμνουν τὸ αὐτὸ ἔργον, ὁποῖον καὶ οἱ 24 εἰς 30 ἡμέρας ἐργαζόμενοι τὰς αὐτὰς ὥρας τὴν ἡμέραν.

Ὅσον ὀλιγωτέρας ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργάζονται, τόσον καὶ περισσοτέρας ἡμέρας χρειάζονται· ὁ λόγος 4: 12 εἶναι λοιπὸν ἀντίςροφος, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν $30 \times \frac{24}{72}$ μὲ $\frac{12}{4}$, λαμβάνομεν τέλος $30 \times \frac{24}{72} \times \frac{12}{4}$, ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν κατὰ τὰς ὁποίας οἱ 72 ἐργάται ἐργαζόμενοι 4 ὥρας τὴν ἡμέραν ταρλειόνουν τὸ ἴδιον ἔργον, τὸ ὁποῖον καὶ οἱ 24 εἰς 30 ἡμέρας ἐκ τεαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὡς καὶ Ειν έρω 30.

φαι ἀν03. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρέπει εἰς τὰς συνθέτους μεθόσυντρόφων τριῶν, νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν τοῦ

150 ατος, ὅςις εἶναι τοῦ ἰδίου εἴδους μὲ τὸν ζητούμενον, μὲ

6000 υς εἴτε εὐθεῖς, εἴτε ἀντιςρόφους, τῶν ποσοτήτων τοῦ

τῆς ὅλης κα ς, τοὺς ὁποίους ἡ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος δίδει·

πρὸς τὰ χέρ ία συνίςαται νὰ γνωρίσωμεν πότε ὁ λόγος εἶναι

εὐθὺς ἡ ἀντίςροφος· οἱ δοθέντες κανόνες (96) δύνανται πάντοτε νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς ταύτην τὴν περίςασιν.

Προςτούτοις δυνάμεθα πρὸς ὁδηγίαν μας, νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀριθμὸς τις ὁλόσχερης ὅταν πολλαπλασιασθῇ μὲ κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος, δίδει γινόμενον μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ ἐξ ἐναντίας μεγαλήτερον, ὅταν μὲ κλάσμα μεῖζον τῆς μονάδος (58 καὶ 62). Ὅθεν εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ § 100. ἐπειδὴ οἱ περισσότεροι ἐργάται χρειάζονται ὀλιγωτέρας ἡμέρας ἡ εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 30 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος, δηλ. μὲ τὸ $\frac{24}{72}$ · ὁ δὲ ἀριθμὸς $30 \times \frac{24}{72}$ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{12}{4}$ τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλήτερον τῆς μονάδος, ἐπειδὴ εἰς τὸ γινόμενον πρέπει νὰ εὕρωμεν περισσότερον ἀριθμὸν ἡμερῶν, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν εἶναι μικρότερος.

§ 104. Διὰ τῶν θεωριῶν τούτων καὶ τῶν δεδομένων κανόνων, λύομεν ὅλα τὰ πολυσύνθετα προβλήματα τούτου τοῦ εἴδους. Ἔςω π.χ. νὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον κατὰ πρῶτον φαίνεται πολλὰ δύσκολον.

8 ἐργάται ἐργαζόμενοι 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 30 ἡμέρας οἰκοδόμησαν ἓν κτίριον ἔχον 60 μέτρα μήκους, 12 πλάτους καὶ 6 ὕψους· 40 ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν οἰκοδομήσει ἄλλο κτίριον ἔχον 320 μέτρα μήκους, 15 πλάτους καὶ 9 ὕψους;

Χωρίζομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 30 τῶν ἡμερῶν τὰς ὁποίας οἱ 8 ἐργάται ἐχρειάσθησαν, καὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τοὺς λόγους

8: 40 διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν,
6: 8 διὰ τὰς ὥρας καθ' ἃς ἐργάζονται,
60·320 διὰ τὸ μῆκος τοῦ κτιρίου,
12: 15 διὰ τὸ πλάτος αὐτοῦ,
6: 9 διὰ τὸ ὕψος.

Οἱ πολλοὶ ἐργάται χρειάζονται ὀλιγωτέρας ἡμέρας· λόγος ἀντίςροφος· ἡ $\frac{8}{40}$.

Ὅσον περισσοτέρας ὥρας ἐργάζονται, τόσον ὀλιγωτέρας ἡμέρας

χρειάζονται· λόγος ἀντίστροφος· ἢ $\frac{8}{8}$.

Τὸ πολὺ μῆκος χρειάζεται περισσοτέρας ἡμέρας· λόγος εὐθὺς· ἢ $\frac{320}{60}$.

Τὸ πολὺ πλάτος καὶ ὕψος χρειάζονται περισσοτέρας ἡμέρας· λόγοι εὐθεῖς· ἢ $\frac{15}{12}$ · $\frac{9}{6}$.

Ὅθεν τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁλοσχερῆ τινα ἀριθμὸν μὲ τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων (65, 66) ἢ $30\times\frac{8}{40}\times\frac{6}{8}\times\frac{320}{60}\times\frac{15}{12}\times\frac{9}{6}$.

Κάμνοντες τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τούτους, εὑρίσκομεν εὐκόλως 45 ἡμέρας.

## Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἑταιρίας.

§ 105. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἔχοντα μεταξύ των λόγους δεδομένους· ὀνομάζεται δὲ οὕτω, ἐπειδὴ δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν ποσότητα ἢ τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς ἕκαστον μέλος ἑταιρίας τινὸς, ἀναλόγως τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα κατέθεσε.

Ἡ μέθοδος τῆς ἑταιρίας ἐκτελεῖται διά τινος σειρᾶς ἀναλογιῶν δι' ὧν προσδιορίζομεν τὴν καταβολὴν, τὸ κέρδος, τὸν χαμὸν ἑκάστου συντρόφου, ἢ τὴν ποσότητα τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ λάβῃ κατὰ τὴν διάλυσιν τῆς ἑταιρίας.

§ 106. Εστω νὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον ζήτημα.

Τέσσαρες ἔμποροι ἐσυντρόφευσαν εἴς τινα ἐπιχείρησιν καὶ ἐσχημάτισαν ἓν κεφάλαιον 60,000 δραχμῶν. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 15,000, ὁ δεύτερος 20,000, ὁ τρίτος 7,500 καὶ ὁ τέταρτος 17,500. Ἐκέρδισαν 9,600. Ζητεῖται τὸ μέρος ἑκάστου ἐκ τοῦ κέρδους τούτου.

Εἶναι φανερὸν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ κέρδος ἑκάστου πρέπει νὰ ἦναι ἀνάλογον τῆς καταβολῆς του, καὶ τῆς ὅλης καταβολῆς τῶν συντρόφων. Ἐπειδὴ ἡ καταβολὴ ἑκάστου τῶν συντρόφων εἶναι τὰ

$$\frac{15000}{60000},\quad \frac{20000}{60000}\quad \frac{7500}{60000}\quad \frac{17500}{60000}$$

τῆς ὅλης καταβολῆς 60,000, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ μέρη των ὡς πρὸς τὰ κέρδη πρέπει νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Ἀρκεῖ λοι-

νεισθεὶς ἀπ' ἄλλου κεφάλαιόν τι, πρέπει εἰς τὸ τέλος τοῦ προσδιωρισμένου χρόνου, ν' ἀποδώσῃ ὄχι μόνον τὸ κεφάλαιον, ἀλλὰ καὶ τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου.

Κάθε κεφάλαιον τὸ ὁποῖον δανείζει τις, ἢ δίδει διὰ ν' ἀγοράσῃ ἰδιοκτησίας, προσόδους, πραγματείας, κτλ., ὑποτίθεται ὅτι φέρει τόκους.

Ὁ τόκος συνήθως λογαριάζεται πρὸς τόσα τοῖς ἑκατὸν τὸν χρόνον· λαμβάνομεν δηλ. τὸ κεφάλαιον 100 διὰ νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ ὡς μέσον συγκρίσεως.

Οὕτως ὅταν λέγωμεν, ὁ τόκος εἶναι πρὸς 5, 6 ἢ 7 τοῖς ἑκατὸν τὸν χρόνον, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον 100, τιθέμενον καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον, φέρει εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου, 5, 6 ἢ 7 τόκον· παριςάνεται δὲ οὕτω 5 τ. $^0\!/_0$, 6 τ. $^0\!/_0$ ἢ 7 τ. $^0\!/_0$, καὶ ἀπαγγέλλεται 5 τοῖς ἑκατόν, 6 τοῖς ἑκατόν, 7 τοῖς ἑκατόν. Ἡ τιμὴ τοῦ τόκου μεταβάλλεται κατὰ τὰς περιςάσεις.

§ 110. Ἔςω νὰ λύσωμεν τὸ ζήτημα τοῦτο.

Πόσον τόκον φέρουν εἰς ἕνα χρόνον 1500 δρ., πρὸς 5 τ. $^0\!/_0$ τὸν χρόνον;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ζήτημα τοῦτο λέγομεν· ἐὰν 100 δρ. φέρουν 5 δρ., αἱ 1500 πόσα; καὶ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν 100: 5:: 1500:χ, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωςον χ ἴσον μὲ $\frac{5\times1500}{100}$, ἢ ἴσον μὲ 75 δραχ. Οὗτος εἶναι ὁ τόκος τῶν 1500 δρ. εἰς διάςημα ἑνὸς χρόνου, πρὸς 5 τ. $^0\!/_0$ τὸν χρόνον.

§ 111. Δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ ζητήσωμεν τὴν ὁλικὴν ποσότητα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρώσωμεν εἰς διάςημα ἑνὸς χρόνου διὰ τὰς 1500 δρ., πρὸς 5 τ. $^0\!/_0$ τὸν χρόνον.

Εἰς τὴν περίςασιν ταύτην λέγομεν· ἐὰν τὸ κεφάλαιον 100 γίνεται εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου 105, πόσον θέλει γένει τὸ κεφάλαιον 1500; καὶ σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν 100: 105:: 1500: χ, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν χ ἴσον μὲ 1575 δρ., ποσότητα συμφωνοῦσαν μὲ τὸ προηγούμενον παράδειγμα.

§ 112. Ἐνίοτε συμβαίνει νὰ λογαριάσωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου εἰς διάστημα καιροῦ περισσοτέρου ἢ ὀλιγωτέρου τοῦ χρόνου. Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίστασιν εὑρίσκομεν τὸν τόκον δι' ἕνα χρόνον, καὶ τὸν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεδομένων χρόνων· εἰς δὲ τὴν δευτέραν προσδιορίζομεν τὸν τόκον κατὰ τὸ ἀκόλουθον ζήτημα.

Ἔμπορός τις ἐδανείσθη εἰς τὰς 21 φευρουαρίου, ἀπό τινα ἰδιώτην 25,000 δρ. πρὸς 6τ. $^0\backslash_0$ τὸν χρόνον, καὶ τὰς ἀπέδωκεν εἰς τὰς 16 ὀκτωβρίου τοῦ ἰδίου χρόνου· ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου εἰς τὸ διάστημα τοῦ καιροῦ τούτου.

Ἐὰν κατὰ πρῶτον ζητήσωμεν τὸν τόκον τῶν 25,000 δρ. εἰς ἕνα χρόνον πρὸς 6τ. $^0\backslash_0$, εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω (110) τὴν ἀναλογίαν 100:6::25000:χ ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν χ ἴσον μὲ 1500 δραχμάς· καὶ οὗτος εἶναι ὁ τόκος τῶν 25,000 δρ. δι' ἕνα χρόνον.

Ὁ χρόνος σύγκειται ἐκ 365 ἡμερῶν, καὶ ἐκ τῶν 21 φευρουαρίου μέχρι τῶν 16 ὀκτωβρίου, εἶναι 238 ἡμέραι· ὅθεν εἶναι φανερὸν ὅτι ἐάν, ἀντὶ νὰ κρατήσῃ τὰ χρήματα 365 ἡμέρας, δὲν τὰ κρατήσῃ εἰμὴ 238, δὲν πρέπει νὰ πληρώσῃ 1500 δρ. τόκον, ἀλλὰ μόνον τὸν τόκον τῶν 238 ἡμερῶν. Κάμνοντες λοιπὸν τὴν ἀναλογίαν 238 : 365::χ : 1500, ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι, ἐὰν διὰ 365 ἡμέρας ἐπλήρωσε 1500 δρ. τόκον, πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰς 238, καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἐργασίαν, εὑρίσκομεν χ ἴσον μὲ 978 δρ. καὶ 8 λεπτά.

§ 113. Ἐνίοτε ζητεῖται νὰ εὕρωμεν πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν κεφάλαιόν τι ἐτέθη, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ τέλος καιροῦ τινος φέρει προσδιωρισμένον τινὰ τόκον.

Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν ἐτέθη π.χ. τὸ κεφάλαιον 28,000 δρ. τὸ ὁποῖον εἰς τὸ τέλος 3 χρόνων, ἔδωσε τόκον 5,040 δρ.

Κατὰ πρῶτον ἐπειδὴ ὁ τόκος τῶν 3 χρόνων εἶναι 5040, ὁ τοῦ ἑνὸς χρόνου θέλει εἶναι τὸ τρίτον ταύτης τῆς ποσότητος, ἢ 1680 δρ., ὅθεν λέγομεν, ἐὰν 28,000 δρ. εἰς διάστημα ἑνὸς χρόνου ἔφερον 1680 δρ., αἱ 100 πόσας θέλουν φέρει; καὶ ἔχομεν τὴν

ἀναλογίαν 28000: 1680 :: 100: χ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν χ ἴσον μὲ 6, ὅςις εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δὶ ἕνα χρόνον.

§ 114. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸς 7τ. ο/ο διὰ νὰ λαμβάνωμεν κατ' ἔτος τόκον 6,000 δρ.; Ὁ τόκος 7 δὶ ἕνα χρόνον, εἶναι πρὸς τὸ κεφάλαιον 100, καθὼς ὁ τόκος 6000, πρὸς τὸ ζητούμενον κεφάλαιον· ὅθεν ἐκ τῆς ἀναλογίας 7: 100 :: 6000: χ, συνάγομεν ἀμέσως ὅτι πρέπει νὰ θέσωμεν κεφάλαιον 85,714 δρ. καὶ 23 λεπτά.

## Περὶ τῆς μεθόδου τῆς Ὑφαιρέσεως (escompte).

§ 115. Ὀνομάζεται ὑφαίρεσις ὁ τόκος τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα τραπεζίτης τις δίδει εἴς τινα ὅςις τὸν παρουσιάζει ἓν γραμμάτιον, τοῦ ποίου ἡ προθεσμία ἀκόμη δὲν ἔφθασεν· ἢ ἡ χαριζομένη ποσότης εἴς τινα χρεώςην διὰ τὴν ἐξόφλησιν ἑνὸς γραμματίου, πρὸ τῆς προθεσμίας του. Ἡ ὑφαίρεσις λαμβάνεται διττῶς ἔξωθεν καὶ ἔσωθεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι παρουσιάζομεν εἴς τινα τραπεζίτην ἓν γραμμάτιον ἐκ 2000 δρ., τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρωθῇ μετὰ ἕνα χρόνον, καὶ ὅτι συμφωνοῦμεν μ' αὐτὸν νὰ μᾶς τὸ πληρώσῃ μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 6τ. ο/ο τὸν χρόνον· νὰ μᾶς πληρώσῃ δηλ. τὴν εἰς τὸ γραμμάτιον περιεχομένην ποσότητα, κρατῶν τὸν τόκον τῶν 2000 δρ. πρὸς 6τ. ο/ο τὸν χρόνον. Ὁ τραπεζίτης τότε κρατεῖ 120 δρ. ὑφαίρεσιν διὰ τὸ γραμμάτιον τῶν 2000 δρ., καὶ μᾶς μετρᾷ μόνον 1880· καὶ αὕτη εἶναι ἡ ὀνομαζομένη ἔξωθεν ὑφαίρεσις.

§ 116. Ὁ Τραπεζίτης μᾶς ἔδωκε πραγματικῶς 1880· ἀλλὰ ὁ τόκος τῶν 1880 δὶ ἕνα χρόνον πρὸς 6τ. ο/ο εἶναι 112 δρ. καὶ 80 λ.· κρατῶν δὲ αὐτὸς 120, ἔλαβε περισσότερα παρ' ὅσα πραγματικῶς τοῦ ἀνῆκον. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν λοιπὸν τὴν καθαυτὸ ποσότητα τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ μᾶς δώσῃ, προςρέχομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον μέθοδον τῶν τριῶν. Ὁ τόκος 6 ἑνούμενος μὲ τὸ κεφάλαιον 100 ἢ 106, εἶναι πρὸς τὸ κεφάλαιον ἑνούμενον μὲ τὸν τόκον του 2000, καθὼς 100, τὰ ὁποῖα θέλομεν λάβει διὰ

106, πρὸς τὸ ζητούμενον κεφάλαιον, ἡ 106: 2000:: 100: χ, ἡ ὁποία δίδει τὴν ποσότητα 1886 δρ. καὶ 79 λ. τὴν ὁποίαν ὁ τραπεζίτης πρέπει νὰ πληρώσῃ ἀντὶ τῶν 1880· καὶ αὕτη εἶναι ἡ ἔσωθεν ὑφαίρεσις. Εἰς τὴν πρώτην περίςασιν ὁ τόκος 120 ἑνούμενος μὲ τὴν ποσότητα τὴν ὁποίαν ὁ τραπεζίτης δίδει παράγει 2000· καὶ εἰς τὴν δευτέραν ὁ τόκος 113 δ. καὶ 21 λ. τῶν 1886 καὶ 79, προστιθέμενος εἰς ταύτην τὴν ποσότητα παράγει ἐπίσης 2000.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

### Ἐπολογισμὸς τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν.

Π. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν 6 ἀκολούθων ἀριθμῶν; 5,582,492,458.—4,701,033,029.
— 6,846,354,305. — 9,654,366,007. — 8,973,752,000.
— 3,582,504,326.

Α. 39,321,002,125.

Π. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν 6 ἀκολούθων ἀριθμῶν; 52,146,432,109. — 20,400,012,345. — 42,053,678,901. — 19,708,023,456. — 10,467,789,012. — 35,631,043,567.

Α. 180, 406, 970, 390.

Π. Ν' ἀφαιρέσωμεν
τὸν 4,642,843 ἀπὸ 5,000,000. — κατάλ. 357,157
— 280,000 ἀπὸ 42,000,000. — κατάλ. 41,720,000
— 23,783,643 ἀπὸ 23,883,643. — κατάλ. 100,000
— 42,872,741 ἀπὸ 1000,000,000; — κατάλ. 957,127,259.

Π. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν
τὸν 75,649 μὲ 579. — γινόμενον 43,800,771.
— 687,000 μὲ 356. — γινόμ. 244,572,000
— 530,674 μὲ 45007. — γινόμ. 23,884,044,718.
— 7,931,375 μὲ 30,000. — γινόμ. 237,941,250,000
— 537,024,000 μὲ 690,700. — γινόμ. 917,856,618,800,000

Ε

ἀναλογίαν 28000: 1680 :: 100: χ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν χ ἴσον μὲ 6, ὅςις εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 διὲ ἕνα χρόνον.

§ 114. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸς 7τ. ο\ο διὰ νὰ λαμβάνωμεν κατ' ἔτος τόκον 6,000 δρ.; Ὁ τόκος 7 διὲ ἕνα χρόνον, εἶναι πρὸς τὸ κεφάλαιον 100, καθὼς ὁ τόκος 6000, πρὸς τὸ ζητούμενον κεφάλαιον· ὅθεν ἐκ τῆς ἀναλογίας 7: 100 :: 6000: χ, συνάγομεν ἀμέσως ὅτι πρέπει νὰ θέσωμεν κεφάλαιον 85,714 δρ. καὶ 23 λεπτά.

## Περὶ τῆς μεθόδου τῆς Ὑφαιρέσεως (escompte).

§ 115. Ὀνομάζεται ὑφαίρεσις ὁ τόκος τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα τραπεζίτης τις δίδει εἴς τινα ὅςις τὸν παρουσιάζει ἓν γραμμάτιον, τοῦ ποίου ἡ προθεσμία ἀκόμη δὲν ἔφθασεν· ἢ ἡ χαριζομένη ποσότης εἴς τινα χρεώςην διὰ τὴν ἐξόφλαισιν ἑνὸς γραμματίου, πρὸ τῆς προθεσμίας του. Ἡ ὑφαίρεσις λαμβάνεται διττῶς ἔξωθεν καὶ ἔσωθεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι παρουσιάζομεν εἴς τινα τραπεζίτην ἓν γραμμάτιον ἐκ 2000 δρ., τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρωθῇ μετὰ ἕνα χρόνον, καὶ ὅτι συμφωνοῦμεν μ' αὐτὸν νὰ μᾶς τὸ πληρώσῃ μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 6τ. ο\ο τὸν χρόνον· νὰ μᾶς πληρώσῃ δηλ. τὴν εἰς τὸ γραμμάτιον περιεχομένην ποσότητα, κρατῶν τὸν τόκον τῶν 2000 δρ. πρὸς 6τ. ο\ο τὸν χρόνον. Ὁ τραπεζίτης τότε κρατεῖ 120 δρ. ὑφαίρεσιν διὰ τὸ γραμμάτιον τῶν 2000 δρ., καὶ μᾶς μετρᾷ μόνον 1880· καὶ αὕτη εἶναι ἡ ὀνομαζομένη ἔξωθεν ὑφαίρεσις.

§ 116. Ὁ Τραπεζίτης μᾶς ἔδωκε πραγματικῶς 1880· ἀλλὰ ὁ τόκος τῶν 1880 διὲ ἕνα χρόνον πρὸς 6τ. ο\ο εἶναι 112 δρ. καὶ 80 λ.· κρατῶν δὲ αὐτὸς 120, ἔλαβε περισσότερα παρ' ὅσα πραγματικῶς τοῦ ἀνῆκον. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν λοιπὸν τὴν καθαυτὸ ποσότητα τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ μᾶς δώσῃ, προςρέχομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον μέθοδον τῶν τριῶν. Ὁ τόκος 6 ἑνούμενος μὲ τὸ κεφάλαιον 100 ἢ 106, εἶναι πρὸς τὸ κεφάλαιον ἑνούμενον μὲ τὸν τόκον του 2000, καθὼς 100, τὰ ὁποῖα θέλομεν λάβει διὰ

106, πρὸς τὸ ζητούμενον κεφάλαιον, ἢ 106: 2000:: 100: χ, ἡ ὁποία δίδει τὴν ποσότητα 1886 δρ. καὶ 79 λ. τὴν ὁποίαν ὁ τραπεζίτης πρέπει νὰ πληρώσῃ ἀντὶ τῶν 1880· καὶ αὕτη εἶναι ἡ ἔσωθεν ὑφαίρεσις. Εἰς τὴν πρώτην περίςασιν ὁ τόκος 120 ἑνούμενος μὲ τὴν ποσότητα τὴν ὁποίαν ὁ τραπεζίτης δίδει παράγει 2000· καὶ εἰς τὴν δευτέραν ὁ τόκος 113 δ. καὶ 21 λ. τῶν 1886 καὶ 79, προσθετόμενος εἰς ταύτην τὴν ποσότητα παράγει ἐπίσης 2000.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

### Ὑπολογισμὸς τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν.

Π. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν 6 ἀκολούθων ἀριθμῶν; 5,582,492,458.—4,701,033,029.
— 6,846,354,305.— 9,654,366,007.—8,273,752,000.
— 3,582,504,326.

Α. 39,321,002,125.

Π. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν 6 ἀκολούθων ἀριθμῶν; 52,146,432,109.—20,400,012,345.—42,053,678,901.—
19,708,023,456.—10,467,789,012.— 35,631,043,567.

Α. 180,406,970,390.

Π. Ν' ἀφαιρέσωμεν

τὸν 4,642,843 ἀπὸ 5,000,000.—κατάλ. 357,157.
— 280,000 ἀπὸ 42,000,000.—κατάλ. 41,720,000
— 29,783,643 ἀπὸ 29,883,643.—κατάλ. 100,000
— 42,872,741 ἀπὸ 1000,000,000;—κατάλ. 957,127,259.

Π. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν

τὸν 75,649 μὲ 579,—γινόμενον 43,800,771.
— 687,000 μὲ 356.—γινόμ. 244,572,000
— 530,674 μὲ 45007.—γινόμ. 23,884,044,718.
— 7,901,375 μὲ 30,000.—γινόμ. 237,041,250,000
— 537,084,000 μὲ 590,700.—γινόμ. 317,255,518,800,000

Ε

— 102,030,405 μὲ 504,031,201. — γινόμ. 51,426,405,540, 261,405.

Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον

τοῦ 43,800,771 διὰ 579. — πηλίκον. 75,649.

— 244,572,000, διὰ 356. — πηλίκον. 687,000

— 23,884,044,718 διὰ 45,007. — πηλ. 530,674.

— 57,659,066,400 διὰ 59,600. — πηλ. 967,434.

— 679,543,820,000 διὰ 10,000. — πηλ. 67,954,382.

Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν — 9024 καὶ 3760, καὶ μεταξὺ τῶν 937 καὶ 47. — 752 καὶ 1

## Ὑπολογισμὸς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Π. Νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ά. τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$· β′ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$.

Λ. ά $\frac{140}{420}$, $\frac{168}{420}$, $\frac{31}{420}$, $\frac{360}{420}$· β′ $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$.

Π. Νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{47}{60}$.

Λ. $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{54}{60}$, $\frac{55}{60}$, $\frac{56}{60}$, $\frac{58}{60}$, $\frac{47}{60}$.

Π. Νὰ φέρωμεν εἰς τὴν ἁπλουστέραν των μορφὴν τὰ κλάσματα ά $\frac{56}{84}$· β′ $\frac{72}{184}$· γ′ $\frac{18}{60}$· δ′ $\frac{3760}{9024}$.

Λ. ά $\frac{2}{3}$· β′ $\frac{9}{23}$· γ′ $\frac{3}{10}$· δ′ $\frac{5}{12}$.

Π. Νὰ προσθέσωμεν ά τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$· β′ $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$· γ′ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

Λ. ά $\frac{45}{60}$· β′ $\frac{13}{14}$· γ′ $\frac{43}{60}$.

Π. Νὰ προσθέσωμεν ά 5 $\frac{3}{4}$ εἰς 6 $\frac{2}{3}$· β′ 5 $\frac{2}{3}$ εἰς 7 $\frac{3}{4}$.

Λ. ά 12 $\frac{5}{12}$· β′ 13 $\frac{5}{12}$.

Π. Ν᾽ ἀφαιρέσωμεν ά $\frac{2}{5}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$· β′ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{8}{9}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{13}{14}$· γ′ 3 $\frac{19}{48}$, ἀπὸ 6 $\frac{1}{8}$· δ′ τὰ $\frac{3}{7}$ τῶν $\frac{5}{9}$ τῶν $\frac{2}{3}$ ἀπὸ 7.

Λ. ά $\frac{13}{60}$· β′ $\frac{127}{378}$· γ′ 2 $\frac{35}{48}$· δ′ 6 $\frac{53}{63}$.

Π. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν ά $\frac{2}{5}$ μὲ $\frac{3}{7}$· β′ $\frac{9}{16}$ μὲ $\frac{20}{27}$· γ′

$\frac{?}{11}$ μὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{4}{7}$. δ′ 6 μὲ 3 $\frac{2}{3}$. ε′ 7 $\frac{4}{9}$ μὲ 5 $\frac{3}{7}$.
Α. α′ $\frac{6}{35}$. β′ $\frac{5}{12}$. γ′ $\frac{2}{11}$. δ′ 20 $\frac{2}{5}$. ε′ 40 $\frac{26}{63}$.

Π. Νὰ διαιρέσωμεν α′ $\frac{6}{35}$ διὰ $\frac{3}{7}$. β′ $\frac{20}{27}$ διὰ $\frac{5}{12}$. γ′ $\frac{2}{11}$ διὰ τῶν $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{5}{7}$. δ′ 20 $\frac{2}{5}$ διὰ 3 $\frac{2}{5}$. ε′ 40 $\frac{26}{63}$ διὰ 5 $\frac{3}{7}$. ς′ 13 διὰ $\frac{5}{7}$. ζ′ $\frac{5}{7}$ διὰ 6.
Α. α′ $\frac{2}{5}$. β′ 1 $\frac{7}{9}$. γ′ $\frac{7}{11}$. δ′ 6. ε′ 7 $\frac{4}{9}$. ς′ 18 $\frac{1}{5}$. ζ′ $\frac{5}{42}$.

Π. Νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀκολούθους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 45,0700 | 574,678953 | 0,975642 |
| | 50,7580 | 95,796430 | 0,745257 |
| | 123,0057 | 78,054600 | 0,000598 |
| | 74,7020 | 54,789000 | 0,800700 |
| | 24,8000 | 8,900000 | 0,640530 |
| Α. | 318,3357 | 812,218983 | 3,162727 |

Π. Ν’ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀκολούθους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 74,284 | 437,5 | 75,0034 |
| | 45,375 | 89,657 | 57,875 |
| Α. | 28,909 | 347,843 | 17,1284 |

Π. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν,

τὸν 57,056 μὲ 0,578. — γινόμενον.
32,978368

— 7,6543 μὲ 5,4246. — γινόμενον.
41521515778

— 0,56879 μὲ 0,05674. — γινόμενον.
0,0322731446.

— 0,03246 μὲ 0,02364. — γινόμενον.
0,0007672544.

— 87649 μὲ 0,003687. — γινόμενον.
3221,61363.

Π. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον

τοῦ 0,294 διὰ 4. — πηλίκον 73,5.

— 295, 75 διὰ 8, 45. — πηλίκον 35.

— 0,4368 διὰ 0,0078. — πηλίκον 56.
— 780,516 διὰ 24,3. — πηλίκον 32,12.
— 34246,056 διὰ 436. — πηλίκον 78,546.
— 7,25406 διὰ 957. — πηλίκον 0'00758.

## Μέθοδος τῶν Τριῶν.

### ά Εὐθεῖα.

Π. 30 μέτρα τσόχης τιμῶνται 800 δραχμῶν· τὰ 240 τῆς ἰδίας ποιότητος, πόσων;

Λ. 6400.

Π. 130 χιλιόγραμμα οἴνου τιμῶνται 90 δραχμῶν, τὰ 300 τοῦ ἰδίου οἴνου, πόσων;

Λ. 207 δρ. καὶ 70 περίπου λεπτά.

Π. ἓν μέτρον ὑφάσματος τιμᾶται 6 δρ. καὶ 25 λ., μὲ 281 δρ. καὶ 25 λ., πόσα δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν;

Λ. 45 μέτρα.

Π. $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ὑφάσματος τιμῶνται $\frac{5}{7}$ τῆς δραχμῆς, πόσου τὰ $\frac{7}{8}$;

Λ. $\frac{5}{6}$ τῆς δραχμῆς, ἢ περίπου 83 λεπτῶν.

### β' Ἀντίςροφος.

Π. Τὸ χόρτον λειβαδίου τινὸς ἀρκεῖ νὰ θρέψῃ 18 ἵππους εἰς διάςημα 7 ἑβδομάδων· 42 πόσον καιρὸν μὲ τὸ ἴδιον χόρτον δύνανται νὰ τραφοῦν;

Λ. 3 ἑβδομάδας.

Π. 800 ςρατιῶται πολιορκούμενοι εἴς τινα πόλιν, ἔχουν μόνον 60 $\frac{1}{2}$ ἡμερῶν ζωοτροφίαν· πόσοι ἐκ τῶν ςρατιωτῶν τούτων πρέπει νὰ ἐξέλθουν διὰ νὰ ἐπαρκέσουν εἰς τοὺς λοιποὺς αἱ ζωοτροφίαι αὗται 220 ἡμέρας;

Λ. 680 ςρατιῶται.

Π. 600 ἄνθρωποι ἀποκλεισμένοι εἴς τινα ἀκρόπολιν, ἐδαπάνησαν τὸ ἥμισυ τῆς ζωοτροφίας των εἰς 60 ἡμέρας· εἴς τινα ἔξοδον ἐναντίον τῶν πολιορκητῶν, ἐφονεύθησαν ἢ αἰχμαλωτίσθησαν 200· ζητεῖται νὰ εὕρωμεν πόσας ἡμέρας οἱ μείναντες 400 δύνανται νὰ ζήσουν μὲ τὸ ἄλλο ἥμισυ τῆς ζωοτροφίας;

Α. 90 ἡμέρας.

Π. Ἐὰν δὲ ἄτινα χρῆσιν εἶναι ἀναγκαῖα 15 μέτρα ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου, διὰ τὴν αὐτὴν χρῆσιν πόσον ὕφασμα χρειάζεται ἔχον πλάτος $\frac{3}{4}$;

Α. 13 $\frac{1}{3}$.

Π. Διὰ νὰ μεταφέρῃ τις 745,000 χιλιόγραμμα εἰς ἓν διάστημα 40 μυριομέτρων, ἔλαβε 292 δραχμὰς καὶ 93 λεπτά. Εἰς πόσα μυριόμετρα πρέπει νὰ μεταφέρῃ 423,000 χιλιόγραμμα μὲ τὴν ἰδίαν ποσότητα;

Α. 70,449 μυριόμετρα.

Π. Ἀρχιτέκτων τις δύναται νὰ οἰκοδομήσῃ οἶκόν τινα εἰς 88 ἡμέρας μὲ 24 ἐργάτας· εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ τὸν οἰκοδομήσῃ μὲ 36.

Α. 58 $\frac{2}{3}$.

Π. Ἡμεροδρόμος τις περιπατῶν 6 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 12 ἡμέρας διέτρεξε 64 μυριόμετρα· εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ κάμῃ τὸν ἴδιον δρόμον περιπατῶν 8 ὥρας τὴν ἡμέραν;

Α. 9.

## γ'. Σύνθετος.

Π. Μὲ 6 ἑκατόλιτρα ἀχύρου τρέφονται 4 ἵπποι 8 ἡμέρας· πόσας ἡμέρας δύνανται νὰ τραφοῦν 26 μὲ 136,5 ἑκατόλιτρα;

Α. 28.

Π. Μὲ 2400 δρ. πληρόνομεν τὸν μισθὸν 5 ἀνθρώπων εἰς διάστημα 22 ἑβδομάδων καὶ 6 ἡμερῶν· μὲ 3600 πόσας ἑβδομάδας δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν 12 ἀνθρώπους;

Α. 14 ἑβδομάδας καὶ 2 ἡμέρας.

Π. 8 ἐργάται ἔλαβον 50 δραχ. διὰ ἓν ἔργον, τὸ ὁποῖον διήρκεσε

5 ἡμέρας· 32 ἐργάται ἐργαζόμενοι 24 ἡμέρας πόσας δραχμὰς λάβει;

Α· 960.

Π· Ζωγράφος τις ζωγραφῶν τοὺς τοίχους ἑνὸς οἴκου, ζωγραφίζει 75 τετραγωνικὰ μέτρα εἰς 6 ἡμέρας, ἐργαζόμενος 8 ὥρας τὴν ἡμέραν· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἴδιον ἔργον εἰς 4 ἡμέρας;

Α· 12 ὥρας.

Π· 20 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 25 ἡμέρας ἔσκαψαν ἕνα αὔλακα 50 μέτρων μήκους, 12 πλάτους, καὶ 2 βάθους· 30 ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας δύνανται νὰ σκάψουν ἄλλον αὔλακα 120 μέτρων μήκους, 16 πλάτους, καὶ 3 βάθους;

Α· 20 ἡμέρας.

Π· 12 ἐργάται ἔχοντες 6 βαθμῶν δύναμιν, ἐργαζόμενοι, εἰς γῆν ἔχουσαν 3 βαθμῶν σκληρότητα, 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 40 ἡμέρας ἔσκαψαν ἕνα αὔλακα 300 μέτρων μάκους, 1 μέτρου βάθους, καὶ 2 μέτρων πλάτους· 16 ἄλλοι ἔχοντες 8 βαθμῶν δύναμιν, ἐργαζόμενοι, εἰς γῆν ἔχουσαν 4 βαθμῶν σκληρότητα, 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 72 ἡμέρας πόσον μῆκος ἄλλου αὔλακος δύνανται νὰ κάμουν ἔχοντος 1,5 μέτρων βάθος, 2,25 μέτρων πλάτος;

Α· 142,22 μέτρα.

## Μέθοδος τῆς ἑταιρίας.

Π. Τρεῖς ἔμποροι ἠγόρασαν ἓν φορτίον ἰνδικοῦ (λουλάκι)· ὁ πρῶτος ἔδωκε 27,500 δρ., ὁ δεύτερος 47,500, καὶ ὁ τρίτος 50,000· Ἐκ τοῦ φορτίου τούτου ἐκέρδισαν 15,000 δρ. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάλογον κέρδος ἑκάστου;

Α· Τοῦ πρώτου εἶναι 3300, τοῦ δευτέρου 5700, καὶ τοῦ τρίτου 6000.

Π· Ἄνθρωπός τις ἀποθανὼν ἔμεινε χρεώστης 7500 δρ. εἰς 3 δανειστάς· εἰς τὸν πρῶτον 3000 δρ., εἰς τὸν δεύτερον 2625, καὶ

μὲ τὸν τρίτον 1875. Ἄφησε μόνον εἰς μετρητὰ 4500 δρ. Ζητεῖται πόσον ἕκαστος δανειστὴς πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς ποσότητος ταύτης;

Α. Ὁ πρῶτος 1800, ὁ δεύτερος 1575, καὶ ὁ τρίτος 1125.

Π. Τρεῖς κεφαλαιοῦχοι ἐσχημάτισαν ἓν κοινὸν κεφάλαιον ἐκ 200,000 δραχμῶν· ὁ πρῶτος ἔθεσε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κεφαλαίου, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$, καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{5}{12}$. Ποῖον εἶναι τὸ μέρος ἑκάστου ἐκ τοῦ κέρδους τῶν 48,000 δρ.;

Α. Τοῦ πρώτου 12,000, τοῦ δευτέρου 16,000 καὶ τοῦ τρίτου 20,000.

Π. Τρεῖς κεφαλαιοῦχοι ἐσχημάτισαν ἓν κεφάλαιον διά τινα ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν. ὁ πρῶτος ἔθεσε 22,000 δρ. αἱ ὁποῖαι ἔμειναν εἰς τὴν ἑταιρίαν 1 χρόνον, 8 μῆνας, καὶ 15 ἡμέρας. ὁ δεύτερος 24,500, καὶ ἔμειναν 1 χρόνον 9 μῆνας, καὶ 18 ἡμέρας· ὁ τρίτος 27,500, καὶ ἔμειναν 1 χρόνον 11 μῆνας, καὶ 12 ἡμέρας. πόσον ἕκαστος τούτων θέλει λάβει ἐκ τοῦ κέρδους τῶν 35,000;

Α. Ὁ πρῶτος 9,721 δρ. καὶ 62 λ., ὁ δεύτερος 11,407 καὶ 28, καὶ ὁ τρίτος 13,871 καὶ 10.

Π. Τέσσαρες ἀξιωματικοὶ συντάγματός τινος ἔλαβον χάρισμα 15,600 δρ. αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ διαμοιρασθοῦν μεταξύ των ἀναλόγως τῶν μισθῶν των καὶ τοῦ χρόνου τῆς ὑπηρεσίας των. Ὁ συνταγματάρχης ἔχει μισθὸν 6000 δρ. καὶ 12 χρόνων ὑπηρεσίαν. ὁ ἀντισυνταγματάρχης 5000 καὶ 15 χρόνων ὑπηρεσίαν· ὁ ταγματάρχης 4000 καὶ 20 χρόνων ὑπηρεσίαν, καὶ ὁ λοχαγὸς 3000 καὶ 26 χρόνων ὑπηρεσίαν. Πόσον θέλει λάβει ὁ καθείς;

Α. Ὁ συνταγματάρχης 3682 δρ. καὶ 62 λ., ὁ ἀντισυνταγματάρχης 3836 καὶ 7· ὁ ταγματάρχης 4091 καὶ 80. καὶ ὁ λοχαγὸς 3989 καὶ 50.

## Μέθοδος τῆς μίξεως καὶ τοῦ τόκου.

Π. Χρυσοχόος τις ἀνέλυσεν ὁμοῦ 6 χιλιόγραμμα ἀργύρου πρὸς

150 δρ· τὸ χιλιόγραμμον· 9 χιλιόγραμμα πρὸς 142· 7 χιλιόγραμμα πρὸς 130, καὶ 22 χιλιόγραμμα πρὸς 122· Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ χιλιογράμμου τοῦ μίγματος.

Α. 131 δρ. καὶ 18 λεπτά.

Π· Ἐμίσθωσέ τις διὰ τὴν οἰκοδομὴν ἑνὸς οἰκοδομήματος 64 ἐργάτας, δηλ. 20 κτίςας πρὸς 2 δρ. καὶ 75 λ. ἕκαςον τὴν ἡμέραν· 5 ὑπηρέτας τῶν κτιςῶν πρὸς 1 καὶ 50· 6 ξυλοκόπους πρὸς 3· 4 λεπτουργοὺς πρὸς 3 καὶ 50· 8 κλειδοποιοὺς πρὸς 3 καὶ 25· 9 ζωγράφους πρὸς 3 καὶ 75· 4 χαρτοκολλητὰς πρὸς 2 καὶ 80· 5 ςεγαςὰς πρὸς 2 καὶ 85· 3 μολιβδουργοὺς πρὸς 3 καὶ 10. Ζητεῖται ἡ ἀνάλογος εἰς ἕκαςον πληρωμὴ, ἐὰν οὗτοι συμφωνήσουν νὰ πληρωθοῦν ἐξίσου;

Α. 2 δρ· καὶ περίπου 95 λεπτά.

Π· Αἱ 25,765 δραχμαὶ πρὸς 5τ· ο\ο πόσαι θέλουν γένει εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου;

Α· 27,053 δρ· καὶ 25 λ·

Π· Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ θέσῃ τις εἰς τόκον πρὸς 5τ· ο\ο διὰ νὰ λαμβάνῃ κατ᾽ ἔτος 6000 δρ·

Α· 120,000·

Π· Μεταπωλεῖ τις οἶκόν τινα τὸν ὁποῖον ἠγόρασε, καὶ κερδίζει 12,000 δρ·, καὶ τὸ κέρδος του εἶναι πρὸς 15τ. ο\ο· πόσου οὗτος ἠγόρασε τὸν οἶκον τοῦτον;

Α· 80,000 δρ·

Π· Ἔμπορός τις ἀναχωρῶν κατέθεσεν εἴς τινα τραπεζίτην μὲ τόκον τὸ κεφάλαιον 6,500 δρ· Μετὰ 3 χρόνους καὶ 2 μῆνας ὁ τραπεζίτης ἐπλήρωσεν εἰς τὸν ἐπιςρέψαντα ἔμπορον 7529 δ· καὶ 17 λ· ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ τόκου·

Α. 5τ· ο\ο·

Π· Ἰδιώτης τις κατέθεσεν μὲ τόκον εἴς τινα ἔμπορον 6,500 δρ· πρὸς 5τ· ο\ο τὸν χρόνον· ζητεῖται πόσον οὗτος πρέπει νὰ λάβῃ μετὰ 3 χρόνους καὶ 2 μῆνας·

Α· 7529 δρ· καὶ 17 λ·

Π· Ἔμπορός τις μὴ δυνάμενος διά τινας περιςάσεις νὰ πληρώσῃ

ἐν καιρῷ τὸ πρὸς τοὺς δανειστὰς χρέος του· [illegible]
πληρώσῃ ὅσον τάχιστα 6,500 δ. [illegible]
5τ. 0/0 τὸν χρόνον· ὥστε μετὰ τινα καιρὸν [illegible]
καὶ τόκον 7,529 δ. καὶ 17 λ. [illegible]
ἕως νὰ ἐξοφλώσῃ;

Α. 3 χρόνοι καὶ 2 μῆνες.

Π. Γέρων τις θέλων νὰ λαμβάνῃ [illegible] 4000 δ. [illegible]
τ' ἔτος· θέτων τὰ χρήματά του πρὸς 7τ. 0/0 [illegible]
πρέπει νὰ καταθέσῃ;

Α. 57,142 δρ. καὶ 85 λ.

Π. Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ κεφάλαιον [illegible]
90,000 δρ., διὰ νὰ φέρῃ εἰσόδημα 7,200 δρ.;

Α. 8τ. 0/0.

Π. Ποῖος εἶναι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου 42,[illegible] πρὸς 6 [illegible]
τὸν χρόνον;

Α. 2,770 δρ. καὶ 62 λ.

## Μέθοδος τῆς Ὑφαιρέσεως

Π. Ἐμπορός τις ἐμπορευόμενος ἐν γραμμάτιον 4500 [illegible]
ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ εἰς 6 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας [illegible]
θέλει λάβει· συμφωνηθέντος τοῦ τόκου 6τ. 0/0 τὸν χρόνον; [illegible]

Α. 4357 δραχ. καὶ 5 λεπτά.

Π. Ἐμπορός τις ἔλαβε 4357 δραχ. καὶ 5 λ. [illegible]
τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἐξοφληθῇ εἰς 6 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας [illegible]
τραπεζίτης ἐκράτησε τόκον πρὸς 6τ. 0/0. [illegible]
γραμμάτιον ποσότης;

Α. 4500.

Π. Κατέθεσέ τις εἰς τινα τραπεζίτην 4500 δραχμ. [illegible]
ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ μετὰ 6 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας [illegible]
τραπεζίτης ἐπλήρωσε 4357 δρ. καὶ 5 λ. [illegible]
τὸν ἔλαβε;

Α. 6τ. 0/0.

150 δρ. τὸ χιλιόγραμμον. 9 χιλιόγραμμα πρὸς 142. 7 χιλιόγραμμα πρὸς 130, καὶ 22 χιλιόγραμμα πρὸς 122. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ χιλιογράμμου τοῦ μίγματος.

Α. 131 δρ. καὶ 18 λεπτά.

Π. Ἐμίσθωσέ τις διὰ τὴν οἰκοδομὴν ἑνὸς οἰκοδομήματος 64 ἐργάτας, δηλ. 20 κτίςας πρὸς 2 δρ. καὶ 75 λ. ἕκαςον τὴν ἡμέραν. 5 ὑπηρέτας τῶν κτιςῶν πρὸς 1 καὶ 50. 6 ξυλοκόπους πρὸς 3. 4 λεπτουργοὺς πρὸς 3 καὶ 50. 8 κλειδοποιοὺς πρὸς 3 καὶ 25. 9 ζωγράφους πρὸς 3 καὶ 75. 4 χαρτοκολλητὰς πρὸς 2 καὶ 80. 5 ςεγαςὰς πρὸς 2 καὶ 85. 3 μολιβδουργοὺς πρὸς 3 καὶ 10. Ζητεῖται ἡ ἀνάλογος εἰς ἕκαςον πληρωμή, ἐὰν οὗτοι συμφωνήσουν νὰ πληρωθοῦν ἐξίσου;

Α. 2 δρ. καὶ περίπου 95 λεπτά.

Π. Αἱ 25,765 δραχμαὶ πρὸς 5τ. 0/0 πόσαι θέλουν γένει εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου;

Α. 27,053 δρ. καὶ 25 λ.

Π. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ θέσῃ τις εἰς τόκον πρὸς 5τ. 0/0 διὰ νὰ λαμβάνῃ κατ' ἔτος 6000 δρ.

Α. 120,000.

Π. Μεταπωλεῖ τις οἶκόν τινα τὸν ὁποῖον ἠγόρασε, καὶ κερδίζει 12,000 δρ., καὶ τὸ κέρδος του εἶναι πρὸς 15τ. 0/0. πόσου οὗτος ἠγόρασε τὸν οἶκον τοῦτον;

Α. 80,000 δρ.

Π. Ἔμπορός τις ἀναχωρῶν κατέθεσεν εἴς τινα τραπεζίτην μὲ τόκον τὸ κεφάλαιον 6,500 δρ. Μετὰ 3 χρόνους καὶ 2 μῆνας ὁ τραπεζίτης ἐπλήρωσεν εἰς τὸν ἐπιςρέψαντα ἔμπορον 7529 δ. καὶ 17 λ. ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ τόκου.

Α. 5τ. 0/0.

Π. Ἰδιώτης τις κατέθεσεν μὲ τόκον εἴς τινα ἔμπορον 6,500 δρ. πρὸς 5τ. 0/0 τὸν χρόνον. ζητεῖται πόσον οὗτος πρέπει νὰ λάβῃ μετὰ 3 χρόνους καὶ 2 μῆνας.

Α. 7529 δρ. καὶ 17 λ.

Π. Ἔμπορός τις μὴ δυνάμενος διά τινας περιςάσεις νὰ πληρώσῃ

ἐν καιρῷ τὸ πρὸς τοὺς δανειςὰς χρέος του, ἐσυμφώνησε νὰ τοὺς πληρώσῃ ὅσον τάχιςα 6,500 δ. λογαριάζων τοὺς τόκους πρὸς 5τ. 0\0 τὸν χρόνον· οὗτος μετά τινα καιρὸν ἐπλήρωσε κεφάλαιον καὶ τόκον 7529 δ. καὶ 17 λ. ζητεῖται πόσος καιρὸς ἐπέρασεν ἕως νὰ ἐξοφλοίσῃ;

Α. 3 χρόνοι καὶ 2 μῆνες.

Π. Γέρων τις θέλον νὰ λαμβάνῃ ἰσόβιον εἰσόδημα 4000 δρ. κατ' ἔτος, θέτων τὰ χρήματά του πρὸς 7τ. 0\0, ποίαν ποσότητα πρέπει νὰ καταθέσῃ;

Α. 57,142 δρ. καὶ 85 λ.

Π. Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ κεφάλαιον 90,000 δρ., διὰ νὰ φέρῃ εἰσόδημα 7,200 δρ.;

Α. 8τ. 0\0.

Π. Ποῖος εἶναι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου 42,625, πρὸς 6 $\frac{1}{2}$τ. 0\0 τὸν χρόνον;

Α. 2,770 δρ. καὶ 62 λ.

## Μέθοδος τῆς Ὑφαιρέσεως.

Π. Ἔμπορός τις ἐμπορευόμενος ἓν γραμμάτιον 4500 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξοφλοισθῇ εἰς 6 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας, πόσας θέλει λάβει, συμφωνηθέντος τοῦ τόκου 6τ. 0\0 τὸν χρόνον;

Α. 4357 δραχ. καὶ 5 λεπτά.

Π. Ἔμπορός τις ἔλαβε 4357 δραχ. καὶ 5 λ. δι' ἓν γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἐξοφλοισθῇ εἰς 6 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας. ὁ τραπεζίτης ἐκράτησε τόκον πρὸς 6τ. 0\0. Ποία εἶναι ἡ εἰς τὸ γραμμάτιον ποσότης;

Α. 4500.

Π. Κατέθεσέ τις εἴς τινα τραπεζίτην 4500 δραχ. κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξοφλοίσῃ ἐντὸς 6 μηνῶν καὶ 10 ἡμερῶν. ὁ τραπεζίτης ἐπλήρωσε 4357 δρ. καὶ 5 λ. Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸν ἔλαβε;

Α. 6τ. 0\0.

Ε. Ἔχων τις γραμμάτιον 64,000 πληρωτέον εἰς ἕνα χρόνον, καὶ θέλων νὰ πληρωθῇ μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 6τ. ο\|ο τὸν χρόνον, πόσον πρέπει νὰ λάβῃ;

Α. Ὑφαίρεσις ἔξωθεν 60,160. ἔσωθεν 60,377 δρ. καὶ 35 λ.

Π. Πόσον θέλει λάβει τις διὰ 24,000 δραχμὰς πληρωτέας εἰς 7 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας, πρὸς 6τ. ο\|ο τὸν χρόνον;

Α. Ὑφαίρεσις ἔξωθεν 23,100 δρ. ἔσωθεν 23,132 δ. καὶ 55 λ.

ΤΕΛΟΣ.

# Πίναξ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | ἐπὶ | 2 | ἴσον | 4 |
| 2 | — | 3 | — | 6 |
| 2 | — | 4 | — | 8 |
| 2 | — | 5 | — | 10 |
| 2 | — | 6 | — | 12 |
| 2 | — | 7 | — | 14 |
| 2 | — | 8 | — | 16 |
| 2 | — | 9 | — | 18 |
| 2 | — | 10 | — | 20 |
| 2 | — | 11 | — | 22 |
| 2 | — | 12 | — | 24 |
| 3 | — | 3 | — | 9 |
| 3 | — | 4 | — | 12 |
| 3 | — | 5 | — | 15 |
| 3 | — | 6 | — | 18 |
| 3 | — | 7 | — | 21 |
| 3 | — | 8 | — | 24 |
| 3 | — | 9 | — | 27 |
| 3 | — | 10 | — | 30 |
| 3 | — | 11 | — | 33 |
| 3 | — | 12 | — | 36 |
| 4 | — | 4 | — | 16 |
| 4 | — | 5 | — | 20 |
| 4 | — | 6 | — | 24 |
| 4 | — | 7 | — | 28 |
| 4 | — | 8 | — | 32 |
| 4 | — | 9 | — | 36 |
| 4 | — | 10 | — | 40 |
| 4 | — | 11 | — | 44 |
| 4 | — | 12 | — | 48 |
| 5 | — | 5 | — | 25 |
| 5 | — | 6 | — | 30 |
| 5 | — | 7 | — | 35 |
| 5 | — | 8 | — | 40 |
| 5 | — | 9 | — | 45 |
| 5 | — | 10 | — | 50 |
| 5 | — | 11 | — | 55 |
| 5 | — | 12 | — | 60 |
| 6 | — | 6 | — | 36 |
| 6 | — | 7 | — | 42 |
| 6 | — | 8 | — | 48 |
| 6 | — | 9 | — | 54 |
| 6 | — | 10 | — | 60 |
| 6 | — | 11 | — | 66 |
| 6 | — | 12 | — | 72 |
| 7 | — | 7 | — | 49 |
| 7 | — | 8 | — | 56 |
| 7 | — | 9 | — | 63 |
| 7 | — | 10 | — | 70 |
| 7 | — | 12 | — | 84 |
| 8 | — | 8 | — | 64 |
| 8 | — | 9 | — | 72 |
| 8 | — | 10 | — | 80 |
| 8 | — | 11 | — | 88 |
| 8 | — | 12 | — | 96 |
| 9 | — | 9 | — | 81 |
| 9 | — | 10 | — | 90 |
| 9 | — | 11 | — | 99 |
| 9 | — | 12 | — | 108 |
| 10 | — | 10 | — | 100 |
| 10 | — | 11 | — | 110 |
| 10 | — | 12 | — | 120 |
| 11 | — | 11 | — | 121 |
| 11 | — | 12 | — | 132 |
| 12 | — | 12 | — | 144 |

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

## Ἐξήγησις τῶν ἐν χρήσει εἰς τὴν Γεωμετρίαν σημείων.

Τὸ σημεῖον = σημαίνει τὴν ἰσότητα· οὕτω AB=BΓ σημαίνει ὅτι AB ἰσοῦται μὲ BΓ.

Τὸ σημεῖον + παριςάνει τὴν πρόσθεσιν, καὶ προφέρεται πλέον.

Τὸ σημεῖον — παριςάνει τὴν ἀφαίρεσιν, καὶ προφέρεται μεῖον.

Τὸ σημεῖον X σημαίνει πολλαπλασιασμόν· οὕτω AB×BΓ παριςάνει τὸ γινόμενον AB ἐπὶ BΓ. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν πολλὰς ποσότητας διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἑνόνομεν ὅλας εἰς μίαν παρένθεσιν, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας γράφομεν τὴν κοινὴν ποσότητα τὴν πολλαπλασιάζουσαν ὅλας· οὕτως AB(BΓ+ΓΔ—EZ) ἰσοδυναμεῖ μὲ AB×BΓ+AB×ΓΔ — AB×EZ. Ἐνίοτε, ὅταν δὲν γεννᾶται κάμμία ἀσάφεια, θέτομεν μίαν ςιγμὴν μεταξὺ τῶν δύο παραγόντων, ὡς X.Ψ, ἢ τοὺς δύο παράγοντας τὸν ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου, χωρὶς νὰ παρενθέσωμεν κάνὲν σημεῖον, ὡς Ay, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι A πολλαπλασιάζεται μὲ y. Ἐὰν εἷς τῶν δύο τούτων παραγόντων ἦναι ἀριθμὸς ὡς 5A, σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης A λαμβάνεται πεντάκις.

Τὸ σημεῖον < σημαίνει ὅτι ποσότης τις εἶναι μικροτέρα ἄλλης· A<B ἐκφράζει ὅτι A εἶναι ἐλάσσων τῆς B.

Τὸ σημεῖον > σημαίνει ἐξ ἐναντίας, ὅτι ἡ πρώτη ποσότης εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας.

Τὸ γινόμενον ποσότητός τινος ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ της ὀνομάζεται

Τετράγωνον, καὶ παριςάνεται διὰ μικροῦ τινος 2 θεμένου ἄνω καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ποσότητος· $AB^2$ σημαίνει π. χ. τὸ τετράγωνον τῆς AB, ἢ AB νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἑαυτόν της.

Ὅταν ἡ ποσότης πολλαπλασιάζεται δὶς μὲ τὸν ἑαυτόν της, τὸ γινόμενον ὀνομάζεται κύβος καὶ παριςάνεται δι' ἑνὸς 3, θεμένου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· οὕτως $AB^3$ ἐκφράζεται AB νὰ ὑψωθῇ εἰς τὸν κύβον, καὶ ἰσοδυναμεῖ μὲ $AB \times AB \times AB$.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ σημαίνει τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μιᾶς ποσότητος· διὰ δὲ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς, θέτομεν 3 μεταξὺ τῶν κλάδων τοῦ ῥιζικοῦ· οὕτως αἱ ἐκφράσεις $\sqrt{(A+B)}$, $\sqrt{(A \times B)}$, παριςάνουν τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ κεφαλαίου ἢ τοῦ γινομένου τῶν ποσοτήτων A καὶ B· αἱ δὲ $\sqrt[3]{(A-B)}$, $\sqrt[3]{(A:B)}$, τὴν τῆς κυβικῆς τῆς διαφορᾶς, ἢ τοῦ πηλίκου τῶν A καὶ B.

## Περὶ δυνάμεων καὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. (α)

Ὅταν ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἑαυτόν του πολλάκις ὡς $3 \times 3 \times 3 \times 3$, λέγεται ὅτι εἶναι ὑψωμένος εἴς τινα δύναμιν, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς παριςάνεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παραγόντων, ὀνομαζομένου ἐκθέτου. Ἐνταῦθα ὁ 3 ὑψόνεται εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, καὶ παριςάνεται οὕτω $3^4$, ἴσον μὲ 81· ὁ δὲ 4 εἶναι ὁ ἐκθέτης, ἢ ὁ βαθμός. Ἡ δευτέρα δύναμις ὀνομάζεται ὡσαύτως καὶ τετράγωνον, ἡ δὲ ἡ τρίτη κύβος· $7^2$ ἢ $7 \times 7$ ἴσον μὲ 49 εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 7, $7^3$ ἴσον μὲ $7 \times 7 \times 7$ ἴσον μὲ 343 εἶναι ὁ κύβος τοῦ 7.

---

(α) Πρὸς κατάληψιν τῶν εἰς τὴν Γεωμετρίαν περιεχομένων, προσθέσαμεν τὰ ὀλίγα ταῦτα περὶ δυνάμεων καὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Ὁ Μ.

Ὁ ἀριθμὸς δὲ ὅςις πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἑαυτόν του, ἢ ὅςις φέρει τινὰ ἐκθέτην, ὀνομάζεται ῥίζα· οὕτως 7 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ, ἢ ἡ δευτέρα ῥίζα τοῦ 49, ἡ κυβικὴ, ἢ ἡ τρίτη τοῦ 343. κτλ.

Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος ἐκ δύο ψηφίων, ὡς τοῦ 35, σχηματίζεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μὲ τὸν ἑαυτόν του· ἡ ἐργασία αὕτη ἀπαιτεῖ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα· ά 5×5, δηλ. τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· β' 30×5, τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τῶν μονάδων· γ' ἐκ δευτέρου 30×5. δ' 30×30, τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν ἀριθμοῦ ἐκ δύο ψηφίων, σχηματίζεται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τῶν μονάδων, καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τέλος τῶν μονάδων· οὕτω

$35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225.$

Τὰ τετράγωνα τῶν 10, 100, 1000--- εἶναι 100, 10000, 1000000, ἢ 1, ἑπομένων δὶς τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι εἰς τὴν ῥίζαν. ὅθεν πᾶς ἀριθμὸς ἐξ ἑνὸς μόνου ψηφίου, ἢ περιλαμβανόμενος μεταξὺ 1 καὶ 10, ἔχει τὸ τετράγωνόν του μεταξὺ 1 καὶ 100, δηλ. συγκείμενον ἐξ ἑνὸς ἢ δύο ψηφίων· ὡσαύτως πᾶς ἀριθμὸς ἐκ δύο ψηφίων ἔχει 3 ἢ 4 εἰς τὸ τετράγωνόν του, κτλ. Ἐνγένει τὸ τετράγωνον ἔχει τὰ διπλάσια, ἢ τὰ διπλάσια μεῖον ἑνὸς τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης.

Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν συγκειμένων ἀριθμῶν ἐξ 1 ἢ 2 ψηφίων εὑρίσκονται εὐκόλως. ὅσον δὲ διὰ τὰς ῥίζας τῶν ἄλλων πρέπει νὰ διακρίνωμεν δύο περιςάσεις.

Α'. Ἐὰν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς, ὡς ὁ 784, ἔχῃ 3 ἢ 4 ψηφία, ἡ ῥίζα του ἔχει μόνον 2· ὁ 784 σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων, καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τῶν μονάδων. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον τούτων τῶν μερῶν σχηματίζεται, ἐὰν προσθέσωμεν 2 μηδενικὰ εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἑπομένως τὸ τετράγωνον αὐτὸ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν τριῶν τούτων μερῶν κατέχει τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων. Ὅθεν ἐὰν

χωρίσωμεν τὰ δύο ψηφία 84, τὸ 7 θέλει περιέχει τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, καὶ προσέτι τὰς ἑκατοντάδας τὰς προερχομένας ἀπὸ τ' ἄλλα μέρη τοῦ τετραγώνου.

Ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου 4 τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ 7, εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ζητουμένων δεκάδων· διότι, ἐπειδὴ τὸ 7 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς 784 ὑπάρχει μεταξὺ $20^2$ καὶ $30^2$, ἡ δὲ ῥίζα μεταξὺ 20 καὶ 30, καὶ ἔχομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων 2.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ 7, λαμβάνομεν κατάλοιπον 3, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐκρατήσαμεν ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων, καὶ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τῶν μονάδων· ὁ 384 σύγκειται λοιπὸν ἐκ τῶν δύο τούτων μερῶν.

Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τῶν μονάδων σχηματίζεται, πολλαπλασιαζομένου τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων μὲ τὰς μονάδας, καὶ προσθετομένου ἑνὸς μηδενικοῦ εἰς τὰ δεξιά. Ὅθεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τὸ γινόμενον τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, καὶ ἐπομένως εἰς τὸν 38· ἐὰν λοιπὸν χωρίσωμεν ἀπὸ τὸν 384 τὸ ψηφίον 4 τῶν μονάδων, ὁ 38 θέλει περιέχει προσέτι τὰς προελθούσας δεκάδας ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, καὶ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι θέλουν προκύψει ἐὰν ὁ 784 δὲν ἦναι ἀκριβὲς τετράγωνον. Διαιροῦντες λοιπὸν διὰ τοῦ διπλασίου 4 τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, λαμβάνομεν πηλίκον τὰς μονάδας· ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαιρούμενος 38 εἶναι μεγαλήτερος ἀπ' ἐκεῖνον τὸν ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν, τὸ πηλίκον δύναται νὰ ἦναι ἀρκετὰ μεγάλον, τὸ τοιοῦτον ὅμως διορθόνεται εὐκόλως, διότι ἐὰν τὸ πηλίκον $\frac{38}{4}$, ἢ 9, παριστάνει τωόντι τὰς μονάδας, θέτοντες αὐτὸ εἰς τὸ πλάγιον τοῦ διπλασίου 4 τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, λαμβάνομεν 49, διπλάσιον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης προσθετόμενον εἰς τὰς μονάδας· τὸ δὲ 49×9 θέλει εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου...

| | | |
|---|---|---|
| 7·8 4 | 28 | |
| 3 8·4 | 49 | 48 |
| 3 8 4 | 9 | 8 |
| 0 | 441 | 384 |

τῶν δεκάδων, πλέον τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων· ἀλλὰ 49×9=441>384· λοιπὸν 9 εἶναι μεγάλον· δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 8 κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 48×8=384 ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸ κατάλοιπον δίδει 0, συνάγομεν ὅτι 784 εἶναι τὸ ἀκριβὲς τετράγωνον τοῦ 28· Κατεςρώσαμεν ἀνωτέρω τὸν τύπον τῆς ἐργασίας ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 784, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ 2735, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 52, μὲ κατάλοιπον 31· ὥςε 52 εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν 2735, δηλ. ἡ τοῦ 2735—31, ἢ 2704· Εὕρομεν ἐπίσης $\sqrt{121}=11$·

```
27·35 | 52
2 3·5 | 102
2 0 4 |   2
  31  | 204
 1·21 | 11
  2·1 | 21
  21  |  1
   0  | 21
```

Β′ Ἐὰν τὸ τετράγωνον ἔχῃ ὑπὲρ τὰ τέσσαρα ψηφία, κάμνομεν πάλιν τὸν ἴδιον συλλογισμόν· ἐπειδὴ καὶ τότε, μολονότι ἡ ῥίζα ἔχῃ ὑπὲρ τὰ 2 ψηφία, εἰμποροῦμεν ἀκόμη νὰ τὴν θεωρήσωμεν ὡς συγκειμένην ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων, ὁ 523 π. χ. ἔχει 52 δεκάδας καὶ 3 μονάδας·

Ὅθεν διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 273529, βλέπομεν, διὰ τὸν ἴδιον λόγον, ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, περιλαμβάνεται εἰς 2735 (ἀφοῦ χωρίσωμεν τὰ 2 πρὸς δεξιὰ ψηφία 29), καὶ ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς 2735 δίδει τὰς δεκάδας· Εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ῥίζα αὐτὴ εἶναι 52, μὲ κατάλοιπον 31, ὥςε ἐὰν κατεβάσωμεν 29 εἰς τὸ πλάγιον τοῦ 31, ἔχομεν τὸν 3129 διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τῶν μονάδων, πλέον τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων· χωρίζομεν τὸ ψηφίον 9, διαιροῦμεν τὸν 312 διὰ 104, διπλάσιον τῶν δεκάδων 52, καὶ λαμβάνομεν τὰς μονάδας 3 τῆς ῥίζης, ἢ ἕνα ἀριθμὸν μεγαλήτερον· θέτομεν πάλιν τὸ πηλίκον 3 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 104, πολλαπλασιάζομεν 1043 μὲ 3 καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 3129

```
27·35·29 | 523
2 3·5    | 102   1043
2 0 4    |   2      3
  31 2·9 | 204   3129
  31 2 9 |
       0 |
```

ἀπὸ τὸ κατάλοιπον 3129· 523 λοιπὸν εἶναι ἀκριβῶς ἡ ζητουμένη ῥίζα·

Ὁ συλλογισμὸς οὗτος ἐφαρμόζεται εἰς πάντα ἀριθμόν, καὶ βλέπομεν ὅτι πρέπει, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιά, νὰ τὸν χωρίζωμεν εἰς τμήματα ἐκ δύο ψηφίων· εἰς τὸ τελευταῖον δὲ τμῆμα δύναται νὰ μείνῃ καὶ ἓν μόνον· Ἕκαστον τμῆμα δίδει ἓν ψηφίον εἰς τὴν ῥίζαν, ἑπομένως ὅταν δοθῇ ὁ ἀριθμός, εὐκόλως γνωρίζομεν πόσα ψηφία ἡ ῥίζα πρέπει νὰ ἔχῃ· Ὅταν ἡ ῥίζα αὕτη δὲν ἦναι ἀκριβής, ἡ πρᾶξις μᾶς φέρει εἰς κατάλοιπον, τὸ ὁποῖον θέλομεν ἰδεῖ πῶς πρέπει νὰ τὸ μεταχειρισθῶμεν διὰ νὰ προσεγγίσωμεν εἰς τὴν ῥίζαν.

Εἶναι προσέτι ἀνωφελὲς νὰ γράφωμεν τὰ διάφορα γινόμενα τὰ ὁποῖα πρέπει ν' ἀφαιρεθοῦν· εἰμποροῦμεν, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν, νὰ κάμνωμεν συγχρόνως τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν.

```
11· 11· 08· 88· 89 | 33333              | 54·00·00·00 | 7348
 2 1·1             |---------------     |  5 0.0      |--------
 1 8 9             | 63       663       |   7 1 0.0   | 143×3
 -----             |  3         3       |   1 2 4 40·0| 1464×4
   2 2 0·8         | ---      ----      | κατ. 6 8 9 6| 14688×8
   1 9 8 9         | 189      1989      |
   -------         |                    |
     2 1 9 8·8     | 6663      66663    |
     1 9 9 8 9     |    3          8    |
     ---------     | -----    ------    |
       1 9 9 98·9  | 19989    199989    |
     -----------   |                    |
       κατ... 0    |                    |
```

Ὀνομάζονται Συμμετρικοὶ ἢ Λογικοὶ ἀριθμοί, ὅσοι ἔχουν κοινὸν μέτρον μὲ τὴν μονάδα· $\frac{2}{5}$ π.χ. εἶναι ἀριθμὸς συμμετρικός, ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς μονάδος περιέχεται πεντάκις εἰς τὴν 1, καὶ δὶς εἰς $\frac{2}{5}$. Ἀλλὰ πᾶς ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς ὅστις δὲν εἶναι ἀκριβὴς τετράγωνον ὁλοσχεροῦς, δὲν εἶναι οὔτε κλασματικοῦ, καὶ ἑπομένως εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν μονάδα· διότι ἐὰν εἶχε κοινὸν μέτρον, τὸ $\frac{1}{5}$ π.χ. περιεχόμενον πεντάκις εἰς τὴν μονάδα καὶ 13 φορὰς εἰς τὴν $\sqrt{7}$, ὥστε νὰ ἔχωμεν ἀκριβῶς $\frac{13}{5} = \sqrt{7}$,

λαμεν λάβει ὑψόνοντες εἰς τὸ τετράγωνον, $\frac{169}{25}=7$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ κλάσμα $\frac{169}{25}$ εἶναι ἀνάγωγον.

Ἐπειδὴ κανὲν ἐκ τῶν μερῶν εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν τὴν μονάδα δὲν δύναται νὰ ληφθῇ τόσον μικρὸν, ὥςε νὰ περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὴν $\sqrt{7}$, καὶ κανὲν κλάσμα δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκριβὴς τιμὴ τῆς $\sqrt{7}$, εὐχαριςούμεθα εἴς τινα προσέγγισιν, καταςένοντες τὰ μέρη τῆς μονάδος τόσον μικρὰ, ὥςε ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς $\sqrt{7}$ καί τινων τῶν μερῶν τούτων νὰ εἰμπορῇ ν' ἀμεληθῇ, ὡς ἀσήμαντος. Ἐὰν ἡ μονὰς π. χ. περιέχῃ 100 μέρη, καὶ εὕρομεν ὅτι 2 μονάδες $+$ 64 τούτων τῶν μερῶν εἶναι $<\sqrt{7}$, ἐνῷ $2+65$ εἶναι $>\sqrt{7}$, ὅτι δηλ. ὁ 7 εἶναι μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν 2,64 καὶ 2,65, τότε λέγομεν ὅτι καὶ ἡ $\sqrt{7}$ εἶναι μεταξὺ τούτων τῶν ἀριθμῶν, καὶ λαμβάνομεν ἑπομένως ταύτην τὴν ῥίζαν μεῖον ἑνὸς ἑκατοςοῦ. Οὕτως ἐξηγεῖται τὸ παράδοξον τοῦτο, ὅτι εἰμποροῦμεν νὰ προσεγγίσωμεν εἰς τὴν $\sqrt{7}$, μολονότι $\sqrt{7}$ ἀριθμητικῶς δὲν ὑπάρχει.

Δυνάμεθα διὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων νὰ προσεγγίσωμεν εὐκολώτατα εἰς τὴν ἀκριβῆ ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος· πρὸς ἐκτέλεσιν τούτου θέτομεν κατόπιν τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ δὶς τόσα μηδενικὰ, ὅσα δεκαδικὰ θέλομεν νὰ λάβωμεν εἰς τὴν ῥίζαν· ἐκτελοῦμεν τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸ σύνηθες, καὶ χωρίζομεν ἔπειτα διὰ μιᾶς ὑποςιγμῆς, ἀπὸ τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης, τὰ ζητούμενα δεκαδικά. Τῳόντι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει τόσα δεκαδικὰ ψηφία (Ἀριθ. § 76.) ὅσα καὶ οἱ δύο παράγοντες, τὸ τετράγωνον (τοῦ ὁποίου οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἴσοι), πρέπει νὰ ἔχῃ δεκαδικὰ διπλάσια τῆς ῥίζης. Ἔςω π. χ. νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 87567 καὶ νὰ προσεγγίσωμεν εἰς τὴν καθαυτὸ ῥίζαν μεῖον ἑνὸς χιλιοςοῦ.

Ἐπειδὴ τὰ χιλιοςά, ἀπαιτοῦν τρία δεκαδικὰ, πρέπει νὰ θέσωμεν κατόπιν τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ ἓξ μηδενικὰ, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 87567000000. Ἐκτελοῦντες τὴν ἐργασίαν ταύτην, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα,

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι 295917, καὶ ἑπομένως ἡ τοῦ προτεθέντος 295,917.

Ὡσαύτως, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν του 2 μεῖον ἑνὸς δεκάκις χιλιοςοῦ, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 200000000 καὶ ἔχομεν 14142· χωρίζομεν ἔπειτα ἀπὸ τὰ δεξιὰ τέσσαρα ψηφία, καὶ λαμβάνομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 1,4142 τοῦ 2 μεῖον ἑνὸς δεκάκις χιλιοςοῦ.

Εἰξεύρομεν ('Αριθ. § 65) ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα μὲ κλάσμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν μὲ παρονομαςήν. ἑπομένως διὰ νὰ τετραγωνίσωμεν ἓν κλάσμα, πρέπει νὰ τετραγωνίσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαςήν. οὕτω τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{4}{9}$, τὸ τοῦ $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{16}{25}$.

Ἀντιςρόφως, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαςοῦ. οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{9}{16}$ εἶναι $\frac{3}{4}$, ἐπειδὴ ἡ τοῦ 9 εἶναι 3 καὶ ἡ τοῦ 16, 4. Ἡ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§ 1. Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἐπιςήμη τῆς ὁποίας τὸ ἀντικείμενον εἶναι ἡ καταμέτρησις τῶν ἐκτάσεων, καὶ ἡ εὕρεσις τῶν σχέσεων αὐτῶν. Ἡ ἔκτασις δύναται νὰ θεωρηθῇ κατὰ τρεῖς διαςάσεις· κατὰ μῆκος, πλάτος, ὕψος ἢ βάθος.

Τὸ γεωμετρικὸν σημεῖον εἶναι μέρος τῆς ἐκτάσεως, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος, εἶναι καθ' ὑπερβολὴν μικρὰ, καὶ σχεδὸν ἴσα μὲ τὸ μηδέν. Εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν λέγεται σημεῖον τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου αἱ διαςάσεις εἶναι μικραὶ, ἀλλὰ ἐπαισθηταί.

Γεωμετρικὴ γραμμὴ ὀνομάζεται σειρὰ συνεχὴς γεωμετρικῶν σημείων. Ἡ γραμμὴ δὲν ἔχει οὔτε πλάτος οὔτε βάθος, παρὰ μόνον μῆκος· ὡς ἡ AB (σχ. I). Εἰς τὰς τέχνας αἱ γραμμαὶ ἔχουν πάντοτε πλάτος, ἀλλὰ πολλὰ μικρόν.

Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ διαςήματος· εἶναι δὲ ἐκείνη τὴν ὁποίαν διατρέχομεν βαδίζοντες πάντοτε πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι τὸ συντομώτερον διάςημα μεταξὺ δύο σημείων· (α)

Ὀνομάζεται γραμμὴ Καμπύλη, ἢ ἁπλῶς Καμπύλη, πᾶσα γραμμὴ ἡ ὁποία δὲν εἶναι μήτε εὐθεῖα μήτε σύνθετος ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν· Τὰ συνθέτοντα αὐτὴν σημεῖα μεταβάλλουν εἰς πᾶσαν ςιγμὴν διεύθυνσιν, καὶ δὲν διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ διαςήματος· ἡ ΑΒΓ (σχ· 2) εἶναι γραμμὴ καμπύλη.

§· 2· Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαςάσεις τῆς ἐκτάσεως, μῆκος καὶ πλάτος· Τὸ ἐξωτερικὸν ἢ ἐσωτερικὸν περικάλυμμα ἑνὸς σώματος εἶναι ἐπιφάνεια·

Ἐπίπεδον εἶναι ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐὰν λάβωμεν δύο κατ' ἀρέσκειαν σημεῖα καὶ ἑνώσωμεν αὐτὰ διὰ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη πρέπει νὰ εὑρίσκεται ὁλόκληρος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἠρεμούντων ὑδάτων, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ χαρτίου, εἶναι ἐπίπεδα· ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς τραπέζης λείας εἶναι ἀκόμη ἐπίπεδον, καὶ ἐὰν ἐπ' αὐτῆς ἐφαρμώσωμεν ἕνα κανόνα ἀκριβῶς εὐθὺν, ὁ κανὼν οὗτος θέλει ἐφάπτεται τῆς τραπέζης καθ' ὅλην του τὴν ἔκτασιν, ἅμα τὰ δύο του ἄκρα ἢ δύο ὁποιαδήποτε σημεῖά του ἐφάπτονται τῆς τραπέζης ταύτης·

§ 3. Καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται, ὅταν ὅλαι αἱ διευθύνσεις ἢ τινὲς ἐξ αὐτῶν μεταβάλλονται εἰς πᾶν σημεῖον. Ἐὰν εἴς τινα παρομοίαν ἐπιφάνειαν ἐφαρμώσωμεν κανόνα τινὰ εὐθὺν, ὁ κανὼν οὗτος ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς ἓν σημεῖον, ἢ εἰς πολλὰ, πλὴν κα-

---

(α) Εὐθεῖα γραμμὴ κατὰ μὲν Ἀρχιμήδην εἶναι, ἡ τῶν ἐχουσῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐλαχίςη· κατὰ δὲ Πλάτωνα, ἧς τὰ ἄκρα ἐπιπροσθεῖ πᾶσι τοῖς μέσοις· κατὰ δὲ Εὐκλείδην, ἥτις ἐξίσου τοῖς ἐφ' ἑαυτοῖς σημείοις κεῖται·

τὰ τινας μόνον διευθύνσεις. Τοιαύτη εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ἢ ὁποιουδήποτε ὀρθοῦ σωλῆνος.

Στερεὸν ἢ Σῶμα, εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει συγχρόνως καὶ τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς ἐκτάσεως, τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος. Ἐκ τῶν σωμάτων ἄλλα περατοῦνται ἐξ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, καὶ ἄλλα ἐκ καμπύλων. Ἡ πελεκημένη πέτρα καὶ ἡ πυραμὶς μᾶς δίδουν τὴν ἰδέαν τῶν πρώτων, ἡ δὲ σφαῖρα τὴν τῶν δευτέρων.

§ 4. Δυνάμεθα καὶ ἄλλως πως νὰ ἐννοήσωμεν τὰς γραμμάς, τὰ ἐπίπεδα καὶ τὰς ἐπιφανείας. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ γεννᾶται ἐξ ἑνὸς σημείου τὸ ὁποῖον, ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α (σχ. 1) καὶ κινούμενον πρὸς τὸ Β πάντοτε κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν, ἀφίνει ὄπισθέν του τὸ ἴχνος τῆς διαβάσεώς του· ἡ δὲ καμπύλη γραμμή, ἐξ ἑνὸς σημείου ἀναχωροῦντος ἐκ τοῦ Α (σχ. 2) μεταβάλλοντος εἰς πᾶσαν στιγμὴν διεύθυνσιν, καὶ διερχομένου διαδοχικῶς διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εὐθεῖά τις γραμμὴ προβαίνουσα τακτικῶς, καὶ ἔχουσα τὰ δύο της ἄκρα ἐπὶ δύο ἄλλων εὐθειῶν, γεννᾷ τὸ ἐπίπεδον· ἢ ὅτι γραμμή τις εὐθεῖα ἢ καμπύλη κινουμένη καὶ ἔχουσα τὰ ἄκρα της ἐπὶ δύο ὁμοίων ἢ διαφορετικῶν καμπύλων, ἢ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ μιᾶς καμπύλης, γεννᾷ ὅλας τὰς καμπύλας ἐπιφανείας. Ἡ γραμμὴ τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη γεννοῦν τὰς διαφόρους ταύτας καμπύλας ἐπιφανείας ὀνομάζεται Γεννήτρια.

Ὅταν δύο σχήματα τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμοσθοῦν καὶ συμπέσουν καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ἔχουν τὴν αὐτὴν μορφὴν καὶ τὸ αὐτὸ μέγεθος, καὶ λέγομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἐντελῶς ἴσα.

Ἡ γεωμετρία πραγματεύεται κατὰ πρῶτον περὶ γραμμῶν, ἔπειτα περὶ ἐπιφανειῶν, καὶ τέλος περὶ στερεῶν.

## Περὶ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν καθέτων.

§ 5. Ὅταν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ προεκτεινόμεναι καὶ διευθυ-

νόμεναι εἰς σημεῖα διαφορετικὰ τοῦ διαςήματος συναπαντῶνται· ἡ συναπάντησις αὐτῶν γίνεται εἰς ἓν μόνον σημεῖον τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται σημεῖον τῆς τομῆς των· Αἱ γραμμαὶ ΒΔ καὶ ΑΕ (σχ. 3) συναπαντῶνται καὶ ἔχουν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των εἰς τὸ Γ· Ἀντιςρόφως, δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ τεμνόμεναι εἰς ἓν σημεῖον Γ, διευθύνονται εἰς σημεῖα διαφορετικὰ τοῦ διαςήματος·

§ 6· Δυνάμεθα πάντοτε μεταξὺ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β (σχ. 1) νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν ΑΒ· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ μίαν μόνην, διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ Α ἓν μόνον σημεῖον ταύτης τῆς γραμμῆς διευθύνετο πρὸς ἄλλο σημεῖον τοῦ διαςήματος παρὰ εἰς ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον διευθύνεται τὸ Β, ἡ γραμμὴ ΑΒ δὲν ἤθελεν εἶναι εὐθεῖα (§ 1).

Ἐξ ἐναντίας μεταξὺ δύο δεδομένων σημείων δυνάμεθα νὰ σύρωμεν ἀπείρους καμπύλας γραμμάς, ἐπειδὴ αὗται δύνανται ν' ἀπομακρυνθοῦν καθόλους τοὺς τρόπους τῆς εἰς τὸ διάςημα διευθύνσεώς των·

§ 7· Ἡ διάςασις δύο τεμνομένων γραμμῶν ΒΔ καὶ ΑΕ, ἢ ἡ διαφορὰ τῆς διευθύνσεως τὴν ὁποίαν αὗται λαμβάνουν, ὀνομάζεται Γωνία, ἢ Γωνία ἐπίπεδος. (α) Τὸ σημεῖον Γ τῆς τομῆς των ὀνομάζεται κορυφὴ τῆς γωνίας, αἱ δὲ γραμμαὶ ΓΒ καὶ ΓΑ πλευραὶ αὐτῆς. Συνήθως ἡ γωνία παριςάνεται διὰ τοῦ γράμματος Γ τῆς κορυφῆς, θεμένου μεταξὺ τῶν δύο γραμμάτων Β καὶ Α τῶν πλευρῶν. Οὕτως ἡ γωνία Γ παριςάνεται διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων ΒΓΑ.

§ 8· Ἡ γωνία δύναται νὰ ἦναι μεγάλη ἢ μικρά, κατὰ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ σχηματίζουσαι τὰς πλευρὰς γραμμαὶ διευθύνονται· Ἡ γωνία ΒΓΔ (σχ. 4) εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΒΓΑ, καὶ ἡ ΒΓΕ μεγαλητέρα τῆς ΒΓΔ.

§ 9· Δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς γωνίας μεταξύ των· διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΔΓΕ εἶναι ἴ-

---

(α) Γωνία ἐπίπεδός ἐςι ςάσις ἢ κλίσις γραμμῆς ἐπὶ γραμμήν.

ναι, εἶναι. φανερὸν ὅτι μία τούτων εἶναι τὸ τρίτον τῆς ὅλης γωνίας ΒΓΕ, ὅτι ἡ γωνία ΒΓΑ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΔ, καὶ τέλος ὅτι ἡ γωνία ΒΓΔ, εἶναι τὰ δύο τρίτα τῆς γωνίας ΒΓΕ· ἐν ἑνὶ λόγῳ δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς γωνίας ταύτας καθ' ὅλας τῆς διαστάσεως ἢ τοῦ μεγέθους σχέσεις των.

§ 10 Ὀνομάζεται Κάθετος γραμμὴ ἡ τέμνουσα ἄλλην γραμμὴν καὶ μὴ κλίνουσα οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ(σχ. 5) εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, ἐπειδὴ ὑψόνεται χωρὶς νὰ κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος. Ἡ ἐκ τῆς φερομένης καθέτου ἐπὶ ἄλλης εὐθείας σχηματιζομένη γωνία ὀνομάζεται Ὀρθή· οὕτως αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΑΒΓ εἶναι ὀρθαί, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ.

§ 11. Ἐξ ἑνὸς σημείου Β(σχ. 7) ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΔΑΓ μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὴν ΒΑ. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Β δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο καθέτους τὰς ΒΑ, ΒΔ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΑΓ. Ἐκτείνομεν τὴν ΒΑ καὶ λαμβάνομεν τὴν ΑΕ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ· φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, καὶ στρέφομεν μετὰ ταῦτα τὸ μέρος ΔΑΕ περὶ τὴν ΔΑ ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΔΑΒ· ἡ ΑΕ πίπτει ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Ε ἐπὶ τοῦ Β. ὅθεν καὶ ἡ ΔΕ πίπτει ἐπὶ τῆς ΔΒ, ἐπομένως δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας ΒΑΕ καὶ ΒΔΕ μεταξὺ δύο σημείων Β καὶ Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον (§ 6).

§ 12. Ἡ ἐπὶ τῆς ΓΔ εὐθείας (σχ. 5) κάθετος ΑΒ, σχηματίζει πάντοτε δύο γωνίας ὀρθὰς ΑΒΔ, ΑΒΓ· καὶ ἐπειδὴ αὐτὴ δὲν κλίνει οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος (§. 10), αἱ δύο αὗται γωνίαι πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι μεταξύ των.

§ 13. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των· διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν καὶ ἄλλην τινα γραμμὴν τὴν ΘΙ κάθετον (σχ. 6) ἐπὶ τῆς ΖΗ, καὶ εἰς τὰ σχήματα 5 καὶ 6 λάβωμεν τέσσαρα διαστήματα ἴσα ΒΔ, ΒΓ, ΙΖ καὶ ΙΗ, ἔπειτα θέσωμεν τὸ σχῆμα 6 ἐπὶ τοῦ σχήματος 5, ὥστε τὸ σημεῖον Ι νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Β, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η θέλουν πέσει

ἐπὶ τὸν Γ καὶ Δ, διότι ἄλλως δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 6). Λέγομεν ἤδη ὅτι ἡ γραμμὴ ΘΙ θέλει συμπέσει ἀκριβῶς μὲ τὴν κάθετον ΑΒ· διότι, ἐὰν λάβῃ ἄλλην τινὰ διεύθυνσιν τὴν ΒΕ, τότε ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, αἱ νέαι γωνίαι ΕΒΔ, ΕΒΓ δὲν δύνανται πλέον νὰ ἦναι ἴσαι (§ 12), διότι ἡ πρώτη εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΔ κατὰ τὴν γωνίαν ΑΒΕ, καὶ ἡ δευτέρα ὑπερβαίνει τὴν ὀρθὴν ΑΒΓ κατὰ τὴν ἰδίαν αὐτὴν γωνίαν ΑΒΕ. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἴδομεν ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἐκ δύο καθέτων εἶναι πάντοτε μεταξύτων ἴσαι, ἕπεται ὅτι ἡ γραμμὴ ΘΙ δὲν δύναται νὰ λάβῃ ἄλλην διεύθυνσιν παρὰ τὴν τῆς ΒΑ, ἑπομένως ὅτι πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύτων.

§ 14. Ὀξεῖα γωνία ὀνομάζεται ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, ὡς ἡ ΕΒΔ (σχ. 5)· Ἀμβλεῖα δ' ἐξ ἐναντίας, ἡ μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς, ὡς ἡ ΕΒΓ. Ἡ γραμμὴ ΕΒ ἡ ὁποία δὲν εἶναι κάθετος οὔτε ἐπὶ τῆς ΑΒ, οὔτε ἐπὶ τῆς ΓΔ, ὀνομάζεται Πλαγία.

§ 15. Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι σαθερὸν, δυνάμεθα νὰ τὴν λάβωμεν ὡς μονάδα διὰ νὰ μετρῶμεν τὰς ἄλλας γωνίας· οὕτως, ὅταν αὐτὴ ἦναι 1, τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ παρισάνει γωνίαν ὀξεῖαν περιεχομένην τετράκις εἰς τὴν ὀρθὴν, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{2}$ ἀμβλεῖαν κατὰ ἥμισυ μεγαλητέραν τῆς ὀρθῆς.

§ 16. Αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ δύο τεμνομένων εὐθειῶν γωνίαι, ὀνομάζονται Ἐφεξῆς. Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ (σχ. 8) εἶναι Ἐφεξῆς, καθὼς καὶ αἱ ἄνισοι γωνίαι ΕΒΓ, ΕΒΔ.

§ 17. Τὸ κεφάλαιον δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς· διότι, ἐὰν ἐξ ἑνὸς μέρους ἡ ὀξεῖα γωνία ΕΒΔ ἦναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΑΒΓ κατὰ τὴν γωνίαν ΑΒΕ, ἐκ τοῦ ἄλλου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΕΒΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς κατὰ τὴν ἰδίαν γωνίαν ΑΒΕ· ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν ὁμοῦ τὰς γωνίας ταύτας ΕΒΔ, ΕΒΓ, πρέπει νὰ τὰς εὕρωμεν ἴσας μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.

Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης συνάγομεν ἀκόμη ὅτι αἱ πλάγιαι ΖΒ,

ΕΒ, καὶ ὅσαι ἄλλαι τεμνόμεναι εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον μιᾶς εὐθείας, σχηματίζουν γωνίας ΓΒΖ, ΖΒΕ, ΕΒΔ, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.

§ 18. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι ὀνομάζονται αἱ σχηματιζόμεναι, ὡς αἱ ΓΑΔ, ΒΑΕ (σχ. 9), διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν. Αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ΒΑΓ, ΔΑΕ εἶναι ὡσαύτως κατὰ κορυφήν. Αἱ σχηματιζόμεναι λοιπὸν τέσσαρες ἀντικείμεναι γωνίαι ἐκ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, εἶναι ἀνὰ δύο κατὰ κορυφήν.

§ 19. Αἱ ἀνὰ δύο κατὰ κορυφὴν τέσσαρες ἀντικείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς· τοῦτο εἶναι φανερὸν ὅταν ἡ μία τῶν εὐθειῶν ἦναι κάθετος εἰς τὴν ἄλλην· ἀπεδείξαμεν ὅμως (§. 17) ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς· διὰ τὸν ἴδιον λόγον πρέπει καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐφεξῆς ΒΑΕ, ΔΑΕ νὰ ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ ἀνὰ δύο κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι τέσσαρες αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

§ 20. Ἐπειδὴ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΑΓ, ΒΑΕ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ἐὰν ἐξ ἑνὸς μέρους προσθέσωμεν εἰς τὴν γωνίαν ΒΑΓ τὴν γωνίαν ΓΑΔ, ἔχομεν δύο ὀρθάς, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ ἄλλου προσθέσωμεν εἰς τὴν ἰδίαν γωνίαν ΒΑΓ τὴν ΒΑΕ κατὰ κορυφὴν τῆς ΓΑΔ, λαμβάνομεν ὡσαύτως δύο ὀρθάς· ὅθεν ἀναγκαίως πρέπει αἱ δύο γωνίαι ΒΑΕ, ΓΑΔ, αἱ παράγουσαι τὸ αὐτὸ κεφάλαιον ὅταν προστεθοῦν εἰς τὴν αὐτὴν γωνίαν ΒΑΓ, νὰ ἦναι ἴσαι μεταξύ των· καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν καὶ εἰς τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΒΑΓ, ΔΑΕ, συνάγωμεν ὅτι ὅλαι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι πάντοτε ἴσαι.

§ 21. Ὅταν δύο γραμμαὶ τέμνωνται ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν, πλὴν ὄχι καθέτως, ἐκ τῶν ἀνὰ δύο ἐκ τῆς τομῆς των σχηματιζομένων κατὰ κορυφὴν τεσσάρων γωνιῶν, ἐπειδὴ αἱ δύο ἀπέναντι ΓΑΔ, ΒΑΕ, εἶναι ὀξεῖαι, αἱ ἄλλαι δύο ΒΑΓ, ΔΑΕ εἶναι ἀναγκαίως ἀμβλεῖαι. Ὅθεν, ἐὰν μία τῶν τεσσάρων γωνιῶν ἦναι

ὀρθή, ἐπίσης θέλουν εἶναι καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς καὶ αἱ τεμνόμεναι γραμμαὶ κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης. (§. 11).

## Περὶ τῶν Παραλλήλων γραμμῶν.

§ 22. Αἱ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι εὐθεῖαι καὶ μὴ συναπαντώμεναι ὅσον καὶ ἂν ἐπεκτανθοῦν, ὀνομάζονται γραμμαὶ Παράλληλοι, ἢ ἁπλῶς Παράλληλοι· καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει τὰς παραλλήλους Τέμνουσα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν παραλλήλων ἕπεται, α' ὅτι αἱ παράλληλοι γραμμαὶ εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι καὶ παράλληλοι μεταξύ των· β' ὅτι πᾶσα γραμμὴ παράλληλος εἰς ἄλλην, εἶναι παράλληλος καὶ εἰς ὅλας τὰς παραλλήλους τῆς δευτέρας.

§ 23. Πᾶσα γραμμὴ κάθετος εἰς ἄλλην γραμμὴν εἶναι ἐπίσης κάθετος καὶ εἰς τὴν παράλληλον ταύτης. Τῳόντι, ἐπειδὴ ἡ ΖΗ (σχ. 10) εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, αἱ γωνίαι ΖΑΓ, ΖΑΒ, εἶναι ὀρθαί· ἀλλ' ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι ΖΘΕ, ΖΘΔ, πρέπει νὰ ἦναι ὀρθαί, διότι ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται δὲν ἦσαν ὀρθαί, ἡ γραμμὴ ΕΔ ἤθελε συναπαντήσει τὴν γραμμὴν ΒΓ, ἐναντίον τοῦ ὁρισμοῦ τῶν παραλλήλων (§. 22)· ὅθεν ἡ ΖΗ, ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, εἶναι ἐπίσης κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου της ΔΕ.

§ 24. Ἐπὶ τῆς μιᾶς ΑΒ τῶν δύο παραλλήλων γραμμῶν ΑΒ, ΓΔ, (σχ. 11) λαμβάνομεν τὰ τρία ἰσάκις ἀπέχοντα σημεῖα Α, Ε, Β, καὶ φέρομεν μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων τὰς τρεῖς καθέτους ΑΓ, ΕΖ, ΒΔ. Τούτου τεθέντος, ἐὰν στρέψωμεν περὶ τὴν ΕΖ τὸ μέρος ΒΕΖΔ ὥστε νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΕΖΓ, αἱ γραμμαὶ ΕΒ, ΖΔ, ὡς μέρος ἑκάστη μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, θέλουν συμπέσει μὲ τὰς γραμμὰς ΑΕ καὶ ΓΖ, καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Δ θέλουν πέσει ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Γ. ἡ γραμμὴ λοιπὸν ΒΔ θέλει συμπέσει μὲ τὴν γραμμὴν ΑΓ, καὶ θέλει εἶναι ἴση μ' αὐτήν· καὶ ἐπειδὴ ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὅλαι αἱ μεταξὺ παραλλήλων κάθετοι εἶναι ἴσαι, συνάγομεν ὅτι δύο παράλληλοι ἀπέχουν ἰσάκις καθ' ὅλα των τὰ μέρη

§. 25. Διὰ νὰ φέρωμεν παράλληλόν τινα ΓΔ (σχ. 12) εἰς

δεδομένην τινὰ γραμμὴν ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν εἰς ταύτην κάθετον τὴν ΑΓ, καὶ νὰ ὑψώσωμεν ἔπειτα τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ· ἡ ΓΔ τότε θέλει εἶναι παράλληλος εἰς τὴν δεδομένην γραμμήν· διότι ἐὰν αἱ δύο γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν ἦσαν παράλληλοι, ἤθελον συναπαντηθῆ εἴς τι σημεῖον, καὶ ἠθέλαμεν ἔχει (§. 22), ἐκ τοῦ σημείου τούτου δύο καθέτους ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΑΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 11).

§ 26. Ἡ τέμνουσα τέμνει ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅλας τὰς παραλλήλους γραμμάς· διοτι ἐὰν ἐπὶ τῆς ΓΔ (σχ. 13) λάβωμεν τὰ διαστήματα ΓΘ, ΘΔ ἴσα μὲ τὰ ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβανόμενα ΑΗ καὶ ΗΒ, καὶ κινήσωμεν τὴν γραμμὴν ΓΔ ἐπὶ τῆς τεμνούσης παραλλήλως εἰς τὴν ΑΒ, τὰ σημεῖα Γ, Θ, Δ, θέλουν πέσει ἐπὶ τῶν σημείων Α, Η, Β, καὶ αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΗΘΔ, ΗΘΓ, ἐκ τῆς ΓΔ καὶ τῆς τεμνούσης, θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ΕΗΒ, ΕΗΑ ἐκ τῆς ἰδίας τεμνούσης καὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ. Ὅθεν, κτλ.

Αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΗΘΓ, ὀνομάζονται ἐντὸς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Τὸ αὐτὸ ὄνομα φέρουν καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ. Αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΗΘΔ, καὶ αἱ ΒΗΘ, ΗΘΓ, ὀνομάζονται ἐναλλὰξ ἐντός. Αἱ δὲ γωνίαι ΕΗΒ, ΗΘΔ, ἐντὸς καὶ ἐκτός· Τέλος αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΓΘΖ, ἐναλλὰξ ἐκτός. Ἀπεδείχθη λοιπὸν, α΄ Ὅτι αἱ ἐντὸς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος γωνίαι λαμβανόμεναι ὁμοῦ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο γωνίας ὀρθάς·

β΄ Ὅτι αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι·

γ΄ Ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐκτὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι·

δ΄ Ὅτι αἱ ἐναλλὰξ ἐκτὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἢ ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι ΑΗΕ, ΒΗΘ, ΓΘΗ, ΔΘΖ εἶναι ἴσαι μεταξύτων· ὅτι ἐπίσης αἱ τέσσαρες γωνίαι ΒΗΕ, ΑΗΘ, ΔΘΗ, ΓΘΖ εἶναι ὡσαύτως ἴσαι καὶ ὅτι μία ὁποιαδήποτε τῶν πρώτων προστιθεμένη εἰς ὁποιανδήποτε τῶν δευτέρων, σχηματίζει πάντοτε δύο γωνίας ὀρθάς·

Ἡ ὁμοιότης καὶ ἡ ἰσότης τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἐκ μιᾶς τεμνούσης, ἡ ὁποία τέμνει δύο παραλλήλους, εἶναι ἀκριβὴς, διότι ἐὰν δὲν ἦτον, αἱ γραμμαὶ αὗται ἐπεκτεινόμεναι ἔπρεπε νὰ συναπ

παντηθοῦν, καὶ δὲν ἤθελον εἶναι πλέον παράλληλοι.

§ 27. Ἔκτινος δεδομένου σημείου μίαν μόνην παράλληλον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν. διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Θ (σχ. 14) δυνάμεθα νὰ σύρωμεν καὶ ἄλλην παράλληλον τὴν ΙΚ εἰς τὴν ΑΒ, αἱ γωνίαι ΚΘΗ, ΙΘΗ, δὲν θέλουν εἶναι πλέον ἴσαι μὲ τὰς ΕΗΒ, ΑΗΕ, καὶ ἑπομένως ἡ γραμμὴ ΙΚ θέλει συναπαντήσει εἴς τι σημεῖον τὴν ΑΒ, καὶ δὲν θέλει εἶναι παράλληλος εἰς αὐτήν.

## Περὶ τῶν τριγώνων καὶ τῶν πλαγίων.

§ 28. Τρίγωνον εἶναι σχῆμα ἐπίπεδον σχηματιζόμενον ἐκ τριῶν εὐθειῶν τεμνομένων ἀμοιβαίως ἀνὰ δύο, ὄχι ὅμως εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Τὰ μεταξὺ τῶν σημείων τῆς τομῆς περιλαμβανόμενα μέρη ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ (σχ. 15) τῶν εὐθειῶν τούτων, ὀνομάζονται Πλευραὶ τοῦ τριγώνου. Τὰ τρίγωνα ἐκτὸς τῶν τριῶν πλευρῶν, ἔχουν ἀκόμη καὶ τὰς τρεῖς ἀπέναντι τούτων γωνίας ΑΓΒ, ΑΒΓ, ΒΑΓ.

Τρίγωνον Ἰσόπλευρον ὀνομάζεται τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας (σχ. 15, Α)· Ἰσοσκελὲς τὸ ἔχον τὰς δύο μόνον (Β), καὶ Σκαληνὸν τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς ἀνίσους (Γ).

Τρίγωνον Ὀρθογώνιον λέγεται τὸ ἔχον τὴν μίαν γωνίαν ὀρθὴν (Δ). Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ ὀνομάζεται Ὑποτείνουσα· Ἀμβλυγώνιον τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν (Γ), καὶ Ὀξυγώνιον τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας (Β).

Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΑΔ (σχ. 16) ἐκ τῆς κορυφῆς Α μιᾶς τῶν γωνιῶν ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΒΓ, προεκτεινομένης ὅταν ἡ χρεία τὸ καλέσῃ· ἡ πλευρὰ αὕτη ὀνομάζεται Βάσις τοῦ τριγώνου.

§ 29. Μὲ τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας δεδομένου τινὸς τριγώνου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο ἴσον μὲ τὸ δεδομένον. ἐὰν τὸ νέον τοῦτο τρίγωνον κατεσκευάσθη κανονικῶς, πρέπει, ἀφοῦ τεθῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου, νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς αὐτὸ ἐντελῶς.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιε-

χομένην μεταξὺ δύο πλευρῶν ἴσων· διότι, ἐὰν θέσωμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 17) ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἡ γωνία Ζ εἶναι ἴση μὲ τὴν Γ, ἡ πλευρὰ ΖΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΑ, καὶ ἡ ΖΕ τὴν τῆς ΓΒ. Ἀλλ' ὑποθέσαμεν ὅτι ΖΔ=ΓΑ, καὶ ΖΕ=ΓΒ· ἄρα τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α, καὶ τὸ Ε ἐπὶ τοῦ Β· ἡ τρίτη πλευρὰ ΔΕ θέλει πέσει ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ΑΒ (§. 6) καὶ τὰ δύο τρίγωνα, ὡς συμπίπτοντα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, εἶναι ἐπομένως ἴσα.

§ 30. Δύο τρίγωνα εἶναι ἀκόμη ἴσα ὅταν ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν εἰς τὰς ἴσας ταύτας γωνίας πλευρὰν ἴσην· διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Δ καὶ Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Α καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν θέσωμεν τὴν πλευρὰν ΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΓ, αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΔΕ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, θέλουν λάβει τὴν διεύθυνσιν τῶν ΒΓ καὶ ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ε, ἐπειδὴ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, πρέπει νὰ πέσῃ εἴς τι σημεῖον τῆς ΒΓ· ἐπειδὴ δὲ ἀκόμη ἀνήκει καὶ εἰς τὴν ΔΕ, πρέπει, ἀφοῦ θέσωμεν ταύτην ἐπὶ τῆς ΑΒ, νὰ πέσῃ εἴς τι σημεῖον τῆς ΑΒ· ὅθεν, ἐπειδὴ συγχρόνως εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ΑΒ, πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ πέσῃ εἰς τὴν κοινὴν τομήν των Β. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ὡς συμπίπτοντα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, εἶναι ἴσα.

Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον ὅταν γνωρίζωμεν α' τὰ μῆκος τῶν τριῶν πλευρῶν· β' δύο πλευρὰς καὶ τὴν μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν· γ' μίαν πλευρὰν καὶ τὰς δύο γωνίας, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ταύτης.

§ 31. Τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ἄλλου τριγώνου, δὲν ἔπεται ὅτι εἶναι ἴσον μ' αὐτό· διότι (σχ. 18) ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον εἰς τὴν ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ θέλει ἔχει τὴν γωνίαν Α κοινὴν μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν γωνίαν ΑΔΕ ἴσην μὲ τὴν ΑΒΓ ὡς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς (§ 26), καθὼς καὶ τὴν γωνίαν ΑΕΔ ἴσην μὲ τὴν ΑΒΓ. Αἱ τρεῖς λοιπὸν

τοῦ τριγώνου ΑΔΕ, γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς τοῦ ΑΒΓ· τὰ τρίγωνα ὅμως εἶναι ἄνισα.

§ 32. Ἐὰν αἱ εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ γωνιαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 19) ἦναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ ἴσαι μὲ τὰς εἰς τὴν ἴσην ΕΖ μὲ τὴν ΒΓ γωνίας Ε καὶ Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν κατὰ δύο τρόπους τὸ δεύτερον ἐπὶ τοῦ πρώτου· ἢ φέρομεν τὴν πλευρὰν ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, ἢ τὴν ΔΕ ἐπὶ τῆς ἰδίας ταύτης πλευρᾶς, ἀντιςρέφοντες τὸ τρίγωνον· ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας περιςάσεις, τὸ σημεῖον Δ πίπτει ἐπὶ τοῦ Α (§ 30.), αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὄχι μόνον εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἀλλ' ἀκόμη ἴσαι καὶ μὲ τὰς ΔΕ, ΔΖ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ· ὅθεν τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ συνάγομεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ἴσαι· τέλος ὅτι τὸ ἔχον τρίγωνον δύο γωνίας ἴσας εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς ἴσας, ἰσόπλευρον.

§ 33. Ἐὰν ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς ΑΓ (σχ. 20) ὁποιουδήποτε τριγώνου ΑΒΓ λάβωμεν τὸ διάςημα ΑΔ= ΑΒ, καὶ σύρωμεν τὴν γραμμὴν ΒΔ, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ὡς ἰσοσκελὲς θέλει ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν γωνίας ΑΒΔ καὶ ΑΔΒ ἴσας (§ 32.). Τούτου τεθέντος, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον εἰς τὴν γραμμὴν ΒΔ, θέλομεν ἔχει τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΔΓΕ ἴσας (§ 26.)· ἡ δὲ γωνία ΔΓΕ θέλει ὑπερβαίνει τὴν ΔΓΒ κατὰ τὴν ΒΓΕ. Ὅθεν ἡ γωνία ΔΓΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΔΒ, ἢ τῆς ἴσης αὐτῆς ΑΒΔ, αὐτὴ δὲ μικροτέρα τῆς ΑΒΓ κατὰ τὴν γωνίαν ΔΒΓ. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ ἡ γωνία Α εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΓ, ἑπομένως ἡ ΑΒΓ εἶναι ἡ μεγαλητέρα τοῦ τριγώνου γωνία· καὶ ἐπειδὴ ὑποτείνεται ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν πλευρὰν ΑΓ, συνάγομεν ὅτι παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μεγαλητέραν γωνίαν μεγαλητέρα πλευρὰ ὑποτείνει.

§ 34. Ἀντιςρόφως, ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ τὴν μεγαλητέραν γωνίαν ὑποτείνει. Ἔςω ΑΒΓ ἡ μεγαλητέρα γωνία· ἐκ τῶν ὅσων ἀπεδείξαμεν (§ 32.) συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ΑΓ= ΑΒ πρέπει ἀναγ-

καίως καὶ ΑΒΓ= ΑΓΒ· ἐὰν δὲ ΑΓ<ΑΒ, πρέπει ἀκόμη καὶ ΑΒΓ<ΑΓΒ. Ὅθεν τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ἀκολουθεῖ τὰς μεταβολὰς τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ ἐπειδὴ ὑποθέσαμεν ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἄρα καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτὴν πλευρὰ ΑΓ θέλει εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

§35. Παντὸς τριγώνου τὸ κεφάλαιον δύο ὁποιωνδήποτε πλευρῶν εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. Διότι ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 21) καὶ λάβωμεν ΒΔ= ΒΓ· τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΓΔ θέλει ἔχει τὰς δύο του γωνίας ΒΔΓ, ΒΓΔ ἴσας (§32)· καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΒΓΔ, ἢ τῆς ἴσης μ' αὐτὴν Δ κατά τὴν γωνίαν ΑΓΒ, ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, ἐπειδὴ ὑποτείνει τὴν μεγαλητέραν γωνίαν, θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ τῆς ὑποτεινούσης τὴν γωνίαν Δ (§34·)· ἀλλὰ ἡ ΑΔ παριστάνει τὸ κεφάλαιον τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπειδὴ ΒΔ=ΒΓ· ἄρα τὸ κεφάλαιον τῶν δύο τούτων πλευρῶν εἶναι μεῖζον τῆς ΑΓ, ἢ ΑΒ+ΒΓ>ΑΓ· Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης συνάγομεν ἀκόμη ὅτι παντὸς τριγώνου μία πλευρὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς δύο ἄλλων, ἢ ὅτι ΑΒ>ΑΓ—ΒΓ ἢ ΒΓ>ΑΓ--ΑΒ.

§36. Αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ δύο γωνίας ὀρθάς. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 22)· ἐπεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου τούτου πρὸς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν ΔΖ παράλληλον εἰς τὴν ΑΒ. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ ΒΘ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τέμνουσα ἡ ὁποία τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΔΖ, ἡ γωνία ΔΓΘ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΓ (§26)· ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ θεωρεῖται ὡς τέμνουσα, αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΒΑΓ, θέλουσιν εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλὰξ ἐντός· Αἱ σχηματιζόμεναι λοιπὸν τρεῖς γωνίαι ΑΓΒ, ΑΓΔ, ΔΓΘ περὶ τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς γωνίας ΑΓΒ ΒΑΓ ΑΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἀλλ' εἴδομεν ὅτι αἱ ἐκ πλαγίων σχηματιζόμεναι γωνίαι περὶ τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο γωνίας ὀρθὰς (§17·). Ἄρα

αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο γωνίας ὀρθάς, ἢ ΑΒΓ+ΑΓΒ+ΒΑΓ= 2 γωνίας ὀρθάς.

Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι ἡ γωνία ΑΓΘ, ἡ ὀνομαζομένη γωνία ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἀπέναντι ἐντὸς ΑΒΓ καὶ ΒΑΓ, ἐπειδὴ ἐὰν εἰς αὐτὴν ἢ εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΓΒ, λαμβάνομεν πάντοτε δύο γωνίας ὀρθάς.

§ 37. Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ (σχ. 23) ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΑΔ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν τὰς πλαγίας ΑΓ, ΑΒ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΔΓ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ πλαγία ΑΓ, εἶναι μεγαλητέρα τῆς καθέτου ΑΔ (§ 33). Ἐὰν ἤδη ἐκ τοῦ σημείου Γ ὑψώσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τὴν κάθετον ΓΖ, τὴν τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ, σχηματίζομεν ἓν νέον ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΖ, ὅπου ἡ ἀπέναντι πλευρὰ ΑΖ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΓΖ, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ· ἡ ΑΒ λοιπὸν θέλει εἶναι πολὺ περισσότερον μεγαλητέρα τῆς ΑΓ καὶ τῆς ΑΔ· ἡ κάθετος λοιπὸν εἶναι ἡ συντομωτέρα γραμμὴ ἀφ' ὅσας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπό τινος δεδομένου σημείου εἴς τινα εὐθεῖαν, καὶ ἐπομένως ἐκ δύο πλαγίων φερομένων εἴτε εἰς τὸ αὐτό, εἴτε τῆς μιᾶς πρὸς τὸ ἓν καὶ τῆς ἄλλης πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς καθέτου, μεγαλητέρα εἶναι ἡ ἀπέχουσα περισσότερον ἐκ τῆς γραμμῆς ταύτης· ΑΔ<ΑΓ<ΑΒ· ΑΓ<ΑΒ.

§ 38. Αἱ δύο ἰσάκις ἐξ ἑκάστου μέρους τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι· διότι αἱ δύο πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ (σχ. 24), σχηματίζουν δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν γωνίαν ΑΔΒ=ΑΔΓ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων, δηλ· τῆς κοινῆς ΑΔ καὶ τῆς ΒΔ=ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως (§ 29). ὅθεν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα, καὶ ἐπομένως ΑΒ=ΑΓ.

Ἀντιςρόφως, αἱ δύο ἴσαι πλάγιαι ἰσάκις ἐκ τῆς καθέτου ἀπέχουσιν· ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ςραφῇ περὶ τὴν ΑΔ, ὥςε νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, πρέπει τὸ σημεῖον Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς γωνίας ΑΒΔ, διότι ἡ ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, καὶ τὸ τρίγωνον

ΑΒΓ ἰσοσκελές, ἡ ΑΓ ἐφαρμόζεται λοιπὸν εἰς τὴν ΒΔ καὶ διὰ ΑΓ=ΒΔ. ὅθεν αἱ δύο ἴσαι πλάγιαι ἰσάκις ἐκ τῆς καθέτου ἀπέχουσιν.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ΒΔ=ΔΓ, ἕπεται ὅτι ἡ κάθετος διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς καὶ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, καὶ ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΔ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην, καὶ τὰς ὑποτεινούσας ΑΒ, ΑΓ ἴσας, εἶναι ἴσα.

## Περὶ τῶν τετραπλεύρων καὶ πολυγώνων.

§ 59. Τὸ ἐκ τεσσάρων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΔ, ΓΔ (σχ. 25) σχηματιζόμενον σχῆμα, ὀνομάζεται Τετράπλευρον. ἔχει δὲ τὸ τετράπλευρον τέσσαρας πλευράς, τέσσαρας γωνίας, καὶ τέσσαρας κορυφάς. Αἱ ἐκ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ἀγόμεναι γραμμαὶ ΑΔ, ΒΓ, ὀνομάζονται Διαγώνιοι.

Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας (σχ. 26, Α) καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας του ὀρθάς, ὀνομάζεται Τετράγωνον· αἱ δύο του διαγώνιοι εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ τέμνονται κατ' ὀρθὴν γωνίαν εἴς τι σημεῖον ἀπέχον ἰσάκις ἐκ τῶν τεσσάρων κορυφῶν.

Ὀρθογώνιον ἢ Ἑτερόμηκες (σχ. 26, Β), τὸ ἔχον τὰς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς, καὶ τὰς ἀπέναντι μόνον πλευρὰς ἴσας· αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, καὶ τέμνονται εἴς τι σημεῖον ἰσάκις ἀπέχον τῶν τεσσάρων κορυφῶν, ὄχι ὅμως κατ' ὀρθὴν γωνίαν.

Παραλληλόγραμον ἢ Ῥομβοειδὲς (σχ. 27, Γ), τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, αἱ γωνίαι αὐτοῦ δὲν εἶναι ὀρθαί· αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ διαγώνιοι ἄνισοι. Τὸ παραλληλόγραμον ὀνομάζεται καὶ Ῥόμβος, ὅταν αἱ τέσσαρες πλευραί του εἶναι ἴσαι (σχ. 27, Δ). Αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται κατ' ὀρθὴν γωνίαν.

Τραπέζιον τέλος τὸ ἔχον μόνον δύο πλευράς, παραλλήλους· αἱ

τέσσαρες πλευραὶ καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἄνισοι καθὼς καὶ αἱ διαγώνιοι.

§ 40. Τὸ κεφάλαιον τῶν τεσσάρων γωνιῶν ὁποιουδήποτε τετραπλεύρου, ἰσοῦται μὲ τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς, διότι ἡ διαγώνιος διαιρεῖ ὁποιονδήποτε τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ ἓξ γωνίαι ἰσοῦνται μὲ τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς (§ 36), καὶ αἱ ἓξ αὗται γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰς τέσσαρας γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

Ἕπεται ἐκ τούτου ά. ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι παντὸς τετραπλεύρου δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅλαι ὀξεῖαι ἢ ὅλαι ἀμβλεῖαι. β'. ὅτι παντὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου τὸ κεφάλαιον τῶν δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο γωνίας ὀρθὰς, τὸ κεφάλαιον ἐπίσης τῶν δύο ἄλλων ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.

§ 41. Ὀνομάζονται Πολύγωνα τὰ σχηματιζόμενα σχήματα ἐξ ὁσωνδήποτε εὐθειῶν τεμνομένων ἀμοιβαίως ἀνὰ δύο. Τὸ τρίγωνον τὸ τρετράπλευρον εἶναι πολύγωνα. Ἰδιαιτέρως ὅμως ὀνομάζονται πολύγωνα τὰ ἔχοντα σχήματα ὑπὲρ τὰς τέσσαρας πλευράς.

Τὰ πολύγωνα διαιροῦνται ά. εἰς πολύγωνα Κανονικὰ ἢ Ἰσογώνια, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γανίαι εἶναι ἴσαι (σχ. 28, Α). β'. εἰς μὴ κανονικὰ (σχ. 28, Β), τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἄνισοι. Ὀνομάζονται Κυρτὰ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα, ὡς τὸ Α, δὲν ἔχουν γωνίας εἰσερχομένας.

Τὰ πολύγωνα λαμβάνουν ὀνομασίας ἰδιαιτέρας ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τὰς ὁποίας ἔχουν. οὕτως ὀνομάζεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ἑπτάγωνον κ τ λ. τὸ ἔχον 5, 6, 7, κ τ λ. γωνίας.

Ὀνομάζονται Διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΑΓ, ΑΔ, κ τ λ. (σχ. 29) ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὁποιασδήποτε γωνίας, πρὸς τὰς κορυφὰς Γ, Δ, κ τ λ. τῶν μὴ προσκειμένων γωνιῶν εἰς τὴν γωνίαν Α.

§ 42. Κάθε πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο. Τὸ ὀκτάγωνον π. χ. διαιρεῖται, ἐκ τῶν φερομένων διαγωνίων ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς αὐτῆς γωνίας,

εἰς 8—2 ἢ 6 τρίγωνα. Ὡσαύτως τὸ δεκάγωνον εἰς 10—2 ἢ 8, καὶ τὸ δωδεκάγωνον εἰς 12—2 ἢ 10.

§ 43. Ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο, τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων, εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. αἱ δὲ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι μὲ δὶς τόσας γωνίας ὀρθὰς ὅσα τρίγωνα εἶναι, ἕπεται ὅτι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ δὶς τόσας γωνίας ὀρθὰς ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο.

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν μιᾶς τούτων τῶν γωνιῶν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ κεφάλαιον τοῦτο διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν. Τὸ κεφάλαιον π. χ. ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου, εἶναι ἴσον μὲ $2 \times (8-2)$ ἢ μὲ 12 γωνίας ὀρθάς. ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον 12 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν 8, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν μιᾶς τῶν γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου 1 καὶ $\frac{1}{2}$ γωνίαν ὀρθήν.

§ 44. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν ἑκάστην τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου (σχ. 23), τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐκτὸς αὐτοῦ γωνιῶν ΒΓΙ, ΑΒΝ προστιθέμενον εἰς τὸ τῶν ἐντὸς θέλει εἶναι ἴσον μὲ δὶς τόσας γωνίας ὀρθὰς ὅσας πλευρὰς τὸ πολύγωνον ἔχει. διότι ἑκάστη τῶν ἐπεκτεινομένων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ὡς ἡ ΔΙ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εὐθεῖά τις γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας πίπτει πλαγία ἡ ΒΓ καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται σχηματίζουν γωνίας τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον ἰσοῦται μὲ δύο γωνίας ὀρθὰς (§ 17.), ἕπεται ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς καὶ ἐκτὸς γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δὶς τόσας γωνίας ὀρθὰς ὅσας πλευρὰς τὸ πολύγωνον ἔχει.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς καὶ ἐκτὸς γωνιῶν ἀφαιρέσωμεν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς, ἤτοι δὶς τόσας γωνίας ὀρθὰς ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μεῖον δύο λαμβάνομεν κατάλοιπον δὶς δύο γωνίας ὀρθὰς, ἢ τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς, ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκτὸς γωνιῶν. Παντὸς λοιπὸν πολυγώνου τὸ κε-

φάλαιον τῶν ἐκτὸς γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Ἐὰν π. χ. ἀπὸ τὸ κεφάλαιον 8X2=16 τῶν ἐκτὸς καὶ ἐντὸς γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου ἀφαιρέσωμεν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς (§ 43) (8—2)X2=12, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκτὸς ἴσον μὲ 4 ὀρθὰς γωνίας.

## Περὶ τῆς περιφερείας.

§ 45. Κύκλος εἶναι ἐπίπεδός τις ἐπιφάνεια περατουμένη ὑπό τινος καμπύλης γραμμῆς ΔΕΒΘ (σχ. 30) ὀνομαζομένης Περιφερείας, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπό τινος ἐντὸς σημείου Κ, ὀνομαζομένου Κέντρου. Εἰς τὸν λόγον συχνὰ ὀνομάζομεν τὴν περιφέρειαν κύκλον.

Διάμετρος εἶναι ἡ διερχομένη εὐθεῖα ΒΚΔ διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας. Αἱ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΚΘ, ΚΒ, ΚΔ, ὀνομάζονται Ἀκτῖνες, ἑπομένως ἡ ἀκτὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου. Ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ κέντρου τούτου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀκτῖνες πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι· ὅλαι λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἑπομένως καὶ αἱ διάμετροι, ὡς διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

§ 46. Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη. διότι ἐὰν στρέψωμεν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ τὸ μέρος ΒΕΔ ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΘΔ, κανὲν σημεῖον τοῦ πρώτου δὲν δύναται νὰ πέσῃ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ δευτέρου. ἐπειδὴ ἄλλως ἤθελεν εἶναι πλησιέστερα ἢ μακρύτερα τοῦ κέντρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 45.). ὅθεν τὰ ἐκ τῆς διαμέτρου χωριζόμενα δύο μέρη τοῦ κύκλου εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Πᾶσα εὐθεῖα εἰς δύο μόνον σημεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν. διότι ἐὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας εὑρεθοῦν τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας, τότε ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς ταύτην τὴν εὐθεῖαν τρεῖς πλαγίας ἴσας μεταξύ των καὶ ἴσας μὲ τὴν ἀκτῖνα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 37, 38).

§ 47. Πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ ΒΘ περατουμένη ὑπὸ τῶν δύο της ἄκρων εἰς τὴν περιφέρειαν, ὀνομάζεται Χορδή, καὶ κάθε μέρος τῆς περιφερείας Τόξον. Ὅταν ἡ χορδὴ καὶ τὸ τόξον περατοῦνται ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Β καὶ Θ τῆς περιφερείας, λέγομεν ὅτι ἡ χορδὴ ΒΘ ὑποτείνει τὸ τόξον ΒΖΘ.

Τμῆμα εἶναι τὸ περιλαμβανόμενον μέρος ΒΖΘΗ τοῦ κύκλου μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς· καὶ Τομεύς, τὸ μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ δύο ὁποιωνδήποτε ἀκτίνων μέρος ΒΖΘΚ. Ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ὀνομάζεται ἡ κάθετος εὐθεῖα ΑΝ εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Ν μὲ τὴν περιφέρειαν, ὀνομαζόμενον σημεῖον τῆς Ἐπαφῆς· τέμνουσα δὲ ἡ εὐθεῖα ὁποία τέμνει τὸν κύκλον, καὶ ἐκτείνεται ἐκ τοῦ ἑνὸς καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους πέραν τῆς περιφερείας.

§ 48 Πᾶσα χορδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου· διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΘΒΚ, ἡ χορδὴ ΒΘ δὲν δύναται ποτὲ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὰς πλευρὰς ΘΚ καὶ ΒΚ (§ 35.), ἢ μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος. ἡ δὲ διάμετρος ὡς διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος· ὅθεν ἡ διάμετρος εἶναι ἀναγκαίως ἡ μεγίστη χορδὴ ἀφ' ὅσας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν.

§ 49 Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τόξα ὑποτείνουσι· διότι ἐὰν θέσωμεν τὴν μίαν τούτων τῶν χορδῶν ἐπὶ τῆς ἄλλης, τὰ ἄκρα τῆς μιᾶς θέλουν πέσει ἐπὶ τῶν ἄκρων Θ καὶ Β τῆς ἄλλης, ἑπομένως καὶ τὰ δύο τόξα θέλουν συμπέσει καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν (§ 46.). Ἀντιστρόφως, ὑπὸ τὰ ἴσα τόξα ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἢ εἰς ἴσους κύκλους.

§ 50. Ἡ κάθετος ἀκτὶς ἐπὶ τῆς χορδῆς, διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη· Τῷόντι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ (σχ. 31), αἵτινες ὡς πρὸς τὴν κάθετον εἶναι δύο πλάγιαι ἴσαι (§ 38.), ἔχομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΚ τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς δύο ὀρθογώνια ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ δύο πλευρὰς ἴσας, καὶ τὰ ὁποῖα ἑπομένως εἶναι ἴσα· ὅθεν ΔΑ=ΔΒ. Αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΔΒ, ἐπειδὴ εἶναι ἐπίσης πλάγιαι ἴσαι

ἐὰν ςρέψωμεν περὶ τὴν ΔΚ τὸ μέρος ΚΟΔΒ ὥςε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΚΟΔΑ, τὸ σημεῖον Β θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α, καὶ τὸ τόξον ΔΒ ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΑ· διότι ἐὰν κἀνὲν σημεῖον τοῦ πρώτου τόξου πέσῃ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ δευτέρου, θέλει ἀπέχει τότε περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἐκ τοῦ κέντρου Κ (§ 45.)· τὰ τόξα ἄρα ΔΒ, ΔΑ εἶναι ἴσα.

§ 51. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης συνάγομεν α' ὅτι πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς καὶ διαιροῦσα τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη διέρχεται ἀναγκαίως διὰ τοῦ κέντρου· διότι, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καθέτου ταύτης ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν δύο ἄκρων Α καὶ Β (§ 28.)· τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου ἔχει τὴν ἰδιότητα ταύτην ὡς πρὸς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τόξου ἢ τῆς χορδῆς, ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον τοῦτο εἶναι ἓν τῶν σημείων τῆς καθέτου. β' πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνουσα τὸ τόξον ἢ τὴν χορδὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδήν, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν δύο ἄκρων Α καὶ Β τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς.

§ 52. Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου. Ἔςωσαν Α, Δ, Β, (σχ. 3.) τὰ τρία ταῦτα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἑνόνομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΔ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι χορδὴ κύκλου, καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ὑψόνομεν τὴν κάθετον ΕΚ, ἡ ὁποία πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου (§ 51.)· ὁ κύκλος λοιπὸν ὅςις θέλει διέλθει διὰ τῶν σημείων Α καὶ Δ, θέλει ἔχει κέντρον του, εἴς τι σημεῖον τῆς ΕΚ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ κέντρον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Β, πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἴς τι σημεῖον τῆς καθέτου ἐπὶ τῆς χορδῆς ΒΔ. Τὸ κέντρον λοιπὸν Κ ἐπειδὴ πρέπει συγχρόνως νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΚΕ καὶ ΚΘ, κεῖται ἀναγκαίως εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ὅθεν τὸ σημεῖον Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ διερχομένου κύκλου ἐκ τῶν σημείων Α, Δ, Β. Διότι ἂν φέρωμεν τὰς γραμμὰς ΚΑ, ΚΔ, ΚΒ, κατὰ πρῶτον αἱ πλάγιαι ΚΑ, ΚΔ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέχουσαι ἰσάκις ἀπὸ τῆς

ἣν, τὴν ὁποίαν ὑψώσαμεν εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς· διὰ τὸν ἴσον λόγον καὶ αἱ πλάγιαι ΚΑ, ΚΒ εἶναι ἴσαι. Αἱ τρεῖς λοιπὸν πλάγιαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως εἶναι ἀκτῖνες τῆς διερχομένης περιφερείας διὰ τῶν σημείων Α, Δ, Β, καὶ ἐχούσης κέντρον τὸ Κ.

§ 53 Τὰ μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν ΑΒ, ΔΕ, ΖΗ (σχ. 33) περιλαμβανόμενα τόξα ΑΔ καὶ ΒΕ, ΔΖ καὶ ΕΗ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα. διότι ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΛΜΝΠ κάθετον εἰς ὅλας τὰς χορδάς, θέλει τέμνει ἑκάστην εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 50.)· ἐὰν περιπλέον συγκρίνωμεν τὸ μῆκος τῶν εἰς ταύτας τὰς χορδὰς ἀντιστιχούντων τόξων, πρέπει νὰ ἔχομεν τόξ. ΠΑ = τόξ. ΠΒ, τόξ. ΠΔ = τόξ. ΠΕ, τόξ. ΠΖ = τόξ. ΠΗ, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τόξ. ΑΔ = τόξ. ΒΕ, τόξ. ΔΖ = τόξ. ΕΗ. Αἱ παράλληλοι περιλαμβάνουν λοιπὸν εἰς τὴν περιφέρειαν τόξα ἴσα.

§ 54. Οἱ ἴσας ἀκτῖνας ἔχοντες κύκλοι εἶναι ἴσοι.

Ἡ διερχομένη διὰ τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν τεμνομένων εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 34), εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διερχομένης ΓΔ διὰ τῶν σημείων τῆς τομῆς. διότι, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι χορδὴ κοινὴ τῶν δύο περιφερειῶν, ἐὰν εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ταύτης ὑψώσωμεν μίαν κάθετον, αὕτη πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τῶν δύο κέντρων Α καὶ Β (§ 51.). Ἀντιστρόφως λοιπὸν, καὶ ἡ διὰ τῶν δύο κέντρων διερχομένη ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ, διότι ἀπὸ δύο σημεῖα μίαν μόνην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (§ 6.) καὶ προσέτι τὰ δύο κέντρα Α καὶ Β ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Γ καὶ Δ τῆς χορδῆς ΓΔ.

Ἐπειδὴ ἡ διερχομένη διὰ τῶν κέντρων εὐθεῖα ΑΒ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἑνόνουσαν χορδὴν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς Γ καὶ Δ, αἱ δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ τέμνωνται εἰς τρία σημεῖα. διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνονται, καὶ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τὰ τρία ταῦτα σημεῖα, σχηματίζομεν μὲ τρεῖς χορδὰς ἓν τρίγωνον, εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ ὁποίου πρέπει συγχρόνως ἡ γραμμὴ τῶν κέντρων νὰ ἦναι κάθετος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

§ 55 Τὸ διάστημα τῶν κέντρων δύο ἐκτὸς ἐφαπτομένων κύ-

θεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀκτίνων· ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες περατοῦνται εἰς τὴν περιφέρειαν· αἱ δύο δὲ περιφέρειαι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον· διότι ἐὰν ἔχουν καὶ ἄλλο, ἐκ τοῦ δευτέρου τούτου σημείου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς τὰ δύο κέντρα εὐθείας, αἵτινες μὲ τὸ διάστημα τῶν κέντρων θέλουν σχηματίσει ἓν τρίγωνον, ὅπου ἡ ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀκτίνων γραμμὴ αὕτη θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον (§ 35) (σχ. 35, Α καὶ Β).

Ἐὰν τὸ διάστημα τῶν κέντρων ἦναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐντὸς (σχ. 35, Α καὶ Δ)· ἐὰν μικρότερον τῆς διαφορᾶς ταύτης, ὁ εἷς εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου. ἐὰν μικκρότερον τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀκτίνων, τέμνονται· διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ (σχ. 34) ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ κεφαλαίου ΑΓ+ΓΒ τῶν δύο ἀκτίνων· ἐὰν μεγαλήτερον εἷς εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

§ 56. Ἐὰν εἴς τινα κύκλον (σχ. 36) φέρωμεν μίαν διάμετρον τὴν ΑΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἄλλην κάθετον τὴν ΒΔ, διαιροῦμεν οὕτως τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (§ 46)· αἱ δύο δὲ διάμετροι τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Κ, σχηματίζουν ἐπίσης τέσσαρας γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθὴν (§ 12). Ἡ ὀρθὴ λοιπὸν γωνία περιλαμβάνει μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ὁποιαδήποτε καὶ τὸ κέντρον ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας.

Αἱ δύο ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ, ΑΚΔ, (σχ. 37) αἱ ἔχουσαι τὰς κορυφάς των εἰς τὸ κέντρον, περιλαμβάνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τόξα ἴσα· διότι ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν διὰ τῶν χορδῶν ΒΑ καὶ ΑΔ ἔχομεν δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα ἐπειδὴ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν Κ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως· ἡ πλευρὰ ΑΚ κοινὴ καὶ ΒΚ=ΚΔ ὡς ἀκτῖνες (§ 29.). Αἱ χορδαὶ λοιπὸν ΑΒ, ΑΔ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως τὰ μεταξὺ τῶν γωνιῶν ΑΚΒ, ΑΚΔ περιλαμβανόμενα τόξα ΑΒ, ΑΔ, εἶναι ἴσα. Ἀντιςρόφως· τὰ ἴσα τόξα ἀντιςιχοῦν εἰς ἴσας κεντρικὰς γωνίας.

§ 57. Ἐὰν αἱ εἰς τὸ κέντρον γωνίαι ἦναι ἄνισοι, ἀπὸ τῆ

γάλητέραν γωνίαν, μεγαλητέρα πλευρὰ (§ 33.), ἡ μεγαλητέρα χορδὴ ὑποτείνει. Ὅθεν ἡ μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα εἰς τὸ κέντρον γωνία περιλαμβάνει μεταξὺ τῶν πλευρῶν της μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τόξον τῆς περιφερείας· ἢ τέλος τὸ τόξον ἢ ἡ χορδὴ ἀκολουθοῦν τὰς αὐτὰς μεταβολὰς τοῦ μεγέθους τῆς εἰς τὸ κέντρον γωνίας, καὶ ἀντιςρόφως.

## Περὶ τοῦ μέτρου τῶν γωνιῶν.

§ 58. Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ςαθερὸν, ἐλάβαμεν αὐτὴν ὡς μέτρον τῶν ἄλλων γωνιῶν (§ 15)· ἁπλούςερον ὅμως εἶναι νὰ λάβωμεν ὡς μέτρον τὸ τόξον ΑΒ (σχ. 36) ἢ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας περιλαμβανόμενον τέταρτον τῆς περιφερείας.

Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον, διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸν κύκλον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ ἔχομεν ἑπομένως τέσσαρα τέταρτα τῆς περιφερείας δι' ὧν μετροῦμεν τὰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, τὰς περιλαμβανούσας ὅλον τὸ περὶ τὸ Κ διάςημα.

Διαιροῦμεν ἔπειτα ἕκαςον τέταρτον εἰς 90 ἴσα μέρη ὀνομαζόμενα Μοίρας· ἡ περιφέρεια λοιπὸν περιλαμβάνει τετράκις 90 ἢ 360 μοίρας, ἡ ἡμιπεριφέρεια δὶς 90 ἢ 180, τὸ τρίτον τῆς περιφερείας 120, τὸ πέμπτον 72, τὸ ἕκτον 60, τὸ ὄγδοον 45, τὸ δέκατον 36, κ τ λ.

Διὰ νὰ μετρῶμεν καὶ γωνίας μικροτέρας μιᾶς μοίρας, διαιροῦμεν τὴν μοίραν εἰς 60 μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν Λεπτὰ καὶ ἕκαςον λεπτὸν εἰς 60 ἄλλα ὀνομαζόμενα Δεύτερα.

Πρὸς σύντομον παράςασιν τῶν μοιρῶν, λεπτῶν καὶ δευτέρων μεταχειριζόμεθα τὰ σημεῖα ταῦτα $^0$, $'$, $''$. οὕτως $24^0\ 42'\ 28''$, σημαίνουν 24 μοίρας 42 λεπτὰ 28 δεύτερα.

§ 59. Ὀνομάζεται γωνία ἐγγεγραμμένη ἡ ἔχουσα, ὡς ἡ ΒΑΔ (σχ. 38), τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιλαμβανομένου τόξου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Τῷόντι ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΑΕ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΔ, τὸ τρίγω-

νου ΑΚΒ θέλει εἶναι ἰσοσκελὲς, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΚ ΚΒ εἶναι ἴσαι ὡς ἀκτῖνες· αἱ δύο λοιπὸν γωνίαι ΑΒΚ, ΒΑΚ εἶναι ἴσαι (§ 32.), καὶ ἐπομένως ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΚΕ ἰσοδυναμοῦσα μὲ τὰς δύο ἀπέναντι ἐντὸς ΑΒΚ, ΒΑΚ (§ 36.) εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΚ. ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν της εἰς τὸ κέντρον, ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΒΕ, ἡ γωνία ἄρα ΒΑΚ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ γωνία ΚΑΔ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΔ. ὅθεν ΒΑΚ+ΚΑΔ, ἢ ἡ γωνία ΒΑΔ, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΕ+ΕΔ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ.

Ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 39) φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου (§ 52.), ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου θέλει ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιλαμβανομένου τόξου. ἀλλὰ αἱ τρεῖς γωνίαι περιλαμβάνουν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια μετρᾷ τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἔχουν μέτρον δύο γωνίας ὀρθὰς (§ 36).

§ 60. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΓΒ (σχ. 40) τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Γ κεῖται μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας, ἐκτείνομεν τὰς πλευράς της ΑΓ, ΒΓ ἕως νὰ συναπαντήσουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, καὶ ἑνόνομεν τὸ σημεῖον Β μὲ τὸ Ε. Τὸ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν Β καὶ Ε τοῦ τριγώνου ΒΓΕ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΑΓΒ (§ 36)· ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΕ, ἡ δὲ Ε τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒ· ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΔΕ.

Εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Γ (σχ. 41) κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας· διότι ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ ἄκρον Α τῆς πλευρᾶς ΑΓ μὲ τὸ σημεῖον Δ, ὅπου ἡ πλευρὰ ΓΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΔΒ ἐπειδὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰς δύο ἀπέναντι ἐντὸς Α καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΔΑΓ, ἡ Γ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΔΒ—Α· ἀλλ' ἡ

ἂν ΑΔΒ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ, ἡ δὲ Δ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΔ, ἄρα ἡ Γ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τοῦ κοίλου ΑΒ καὶ τοῦ κυρτοῦ ΕΔ τόξου.

§ 61. Ἡ εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΔ (σχ. 42) εἶναι ὀρθή. διότι μέτρον αὐτῆς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΟΔ, ἢ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΔ ἦναι ἰσοσκελές, καὶ κατασκευάσωμεν εἰς τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ κύκλου ἕτερον ἴσον τρίγωνον, σχηματίζομεν οὕτως ἓν τετράγωνον. δυνάμεθα λοιπὸν πάντοτε νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τινα κύκλον ἓν τετράγωνον.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ διὰ τοῦ κέντρου Κ φέρωμεν ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΚΖ, αὕτη θέλει διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΒΕ, ΑΕ (§ 51). Φέροντες λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Ε τὰς χορδὰς ΒΕ, ΑΕ, ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον ἓν ὀκτάγωνον. Δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΑΒ, εἰς ὁσαδήποτε μέρη, καὶ νὰ ἐγγράψωμεν οὕτω πολύγωνα ἐκ περισσοτέρων πλευρῶν. Ἐὰν ἐπίσης διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν τόξων ΑΕ, ΒΕ εἰς δύο, τρία, τέσσαρα, κ. τ. λ. ἴσα μέρη, ἐγγράφομεν πολύγωνα μὲ ἔτι περισσοτέρας καὶ μικροτέρας πλευράς. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐγγράψωμεν εἴς τινα δεδομένον κύκλον πολύγωνον μ' ὁσασδήποτε πλευράς.

§ 61 δίς. Ἐπειδὴ ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων δυνάμεθα, νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου (§ 52.), ἐὰν τὰ τρία ταῦτα σημεῖα ἦναι αἱ τρεῖς κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ περιφέρεια διέρχεται ἀκόμη δι' ὅλων τῶν ἄλλων κορυφῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ δεδομένον λοιπὸν κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ὁσωνδήποτε πλευρῶν, δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον.

Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἑνὸς τετραγώνου, τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦνται θέλουν ἀπέχει ἐξ ἴσου ἐκ τοῦ σημείου Κ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τέμνονται (§ 39.)· ἑπομένως ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κέντρον καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, καὶ φέρωμεν μίαν περι-

φέρειαν, αὕτη θέλει ἐφάπτεται ἑκάστης τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου εἰς μόνον τὸ μέσον σημεῖον τῶν πλευρῶν τούτων.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν λέγομεν ὅτι τὸ τετράγωνον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον. Ἐὰν, ὡς καὶ προηγουμένως, διαιρέσωμεν τὰ ἀντιστιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου τόξα εἰς 2, 3... ἴσα μέρη σχηματίζομεν μίαν σειρὰν κανονικῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων· δυνάμεθα λοιπὸν εἰς δεδομένον κύκλον νὰ περιγράψωμεν ἓν πολύγωνον μ' ὁσασδήποτε πλευράς· καὶ ἀντιστρόφως, εἰς δεδομένον κανονικὸν πολύγωνον μ' ὁσασδήποτε πλευράς, νὰ ἐγγράψωμεν κύκλον.

## Περὶ Ἀναλογιῶν.

§ 62. Δυνάμεθα ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν γραμμῶν νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς αὐτὰς ἐργασίας ὁποίας καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Εἰμποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν γραμμήν τινα κατόπιν ἄλλης γραμμῆς, καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινα γραμμὴν τὸ μῆκος ἄλλης· ὡσαύτως νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα τὸ μέτρον καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τότε γραμμήν τινα μὲ ἄλλην, τὸ ὁποῖον σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὸ μῆκος τῶν γραμμῶν τούτων· καὶ νὰ διαιρέσωμεν γραμμήν τινα δι' ἄλλης, τὸ ὁποῖον πάλιν σημαίνει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὴν πρώτην διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέτρων τῶν παριστανόντων τὴν δευτέραν. Οὕτως ὅταν μετρῶμεν μῆκός τι διὰ τοῦ μέτρου, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τόσα μέρη ἴσα μεταξύ των, καὶ ἴσα ὅλα μὲ τὸ μέτρον.

Θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω ὅτι τὸ γινόμενον γραμμῆς τινος ἐπὶ ἄλλης παριστάνει πάντοτε τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς παραλληλογράμμου, ὅπου αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι τὰ μήκη τῶν δύο αὐτοῦ προσκειμένων πλευρῶν. καὶ ὅτι ὅταν διαιρῶμεν γραμμήν τινα δι' ἄλλης, ὑποθέτομεν ὅτι ὁ διαιρούμενος παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μία πλευρά, καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον ἡ προσκειμένη.

Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ἐν χρήσει καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν,

ὅτι, γνωρίζοντες τρεῖς γραμμὰς Α, Β, Γ, εὐκόλως εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν τὴν τετάρτην Δ ἐκ τῆς ἀναλογίας Α: Β:: Γ: Δ· ἡ γραμμὴ αὕτη ὀνομάζεται τετάρτη ἀνάλογος.

§ 63. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἄκρον Α διὰ τοῦ μέσου Β, καὶ τὸν Γ διὰ τοῦ Δ, λαμβάνομεν τοὺς δύο λόγους $\frac{A}{B}$ καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta}$ οἱ ὁποῖοι διὰ νὰ ἦναι ἀκριβὴς ἡ ἀναλογία πρέπει νὰ ἦναι ἴσοι, δηλ. $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

Οἱ λόγοι τῆς ἀναλογίας, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον αὐτῶν μὲ τὴν αὐτὴν ποσότητα, δὲν μεταβάλλονται· οὕτως ἡ ἰσότης $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ πολλαπλασιασθεῖσα μὲ Δ δίδει $\frac{A \times \Delta}{B} = \frac{\Delta \times \Gamma}{\Delta}$, ἐὰν ἀπὸ τὸν δεύτερον λόγον ἐξαλείψωμεν Δ, ἔχομεν $\frac{A \times \Delta}{B} = \Gamma$, δηλ. τὸν ἕνα μέσον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἄλλου μέσου. Ὡσαύτως ἡ ἰσότης $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$ πολλαπλασιασθεῖσα μὲ Γ δίδει $\frac{B \times \Gamma}{A} = \Delta$· δηλ. τὸν ἕνα ἄκρον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου.

Ὅταν οἱ δύο μέσοι ὅροι ἦναι ἴσοι μεταξύ των, τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν παρασανόμενον μῆκος ὀνομάζεται μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων· οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν Α: Β:: Β: Δ, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $B^2 = A \times \Delta$ καὶ $B = \sqrt{(A \times \Delta)}$, ἡ Β εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν γραμμῶν Α καὶ Δ.

Δυνάμεθα εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν νὰ μεταβάλλωμεν τὴν τάξιν τῶν ἄκρων, ἢ τὴν τῶν μέσων· ἢ νὰ θέσωμεν τοὺς ἄκρους εἰς τὴν θέσιν τῶν μέσων καὶ τούτους εἰς τὴν θέσιν ἐκείνων· Ἐκ τῆς ἀναλογίας Α: Β:: Γ: Δ π. χ. συνάγομεν διαδοχικῶς:

α΄ ἀλλάσσοντες τοὺς ἄκρους Δ: Β:: Γ: Α,
β΄ . . . . . . . τοὺς μέσους Α: Γ:: Β: Δ,
γ΄ θέτοντες τοὺς μέσους εἰς τὴν θέσιν τῶν ἄκρων Β: Α:: Δ: Γ,

καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ

τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, $A \times \Delta = B \times \Gamma$.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων, εἶναι πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πρὸς τὸν τέταρτον. Οὕτως ἐκ τῆς ἀναλογίας $A : B :: \Gamma : \Delta$ (1) λαμβάνομεν

$$A + B : B :: \Gamma + \Delta : \Delta, \quad A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta, \text{ καὶ}$$

$$A \times \Delta + B \times \Delta = \Gamma \times B + B \times \Delta, \quad A \times \Delta - B \times \Delta = \Gamma \times B - B \times \Delta.$$

Αἱ ἀναλογίαι αὗται εἶναι ἀκριβεῖς, διότι δὲν ἐκάμαμεν ἄλλο, παρ' ὅτι ἐπροσθέσαμεν καὶ ἀφαιρέσαμεν ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ ἀπὸ τὸ τῶν μέσων τῆς (1) τὴν αὐτὴν ποσότητα $B \times \Delta$. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἔχουν πρὸς τὸν πρῶτον, ὡς τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πρὸς τὸν τρίτον.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων, ἔχουν πρὸς τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του· διότι ἐὰν μεταβάλωμεν τὴν τάξιν τῶν μέσων τῆς ἀναλογίας $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, λαμβάνομεν

$$A + \Gamma : \Gamma :: B + \Delta : \Delta, \quad A - \Gamma : \Gamma :: B - \Delta : \Delta, \text{ ἢ}$$

ἀφοῦ μεταβάλωμεν τοὺς μέσους:

$$A + \Gamma : B + \Delta :: \Gamma : \Delta, \quad A - \Gamma : B - \Delta :: \Gamma : \Delta.$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z :: H : \Theta$, τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του δηλ.

$$A + \Gamma + E + H : B + \Delta + Z + \Theta :: A : B \text{ ἢ } :: \Gamma : \Delta, \text{ κτλ.}$$

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ μὲ τὸν αὐτὸν λόγον $A : B$.

§ 64. Δύο σχήματα εἶναι ἴσα, ὅταν τεθέντος τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου, συμπίπτουν καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα· ἰσοδύναμα δὲ ὅταν αἱ ἐπιφάνειαί των (§ 2.) ἦναι ἴσαι. Τὰ ἰσοδύναμα σχήματα δύνανται νὰ ἦναι [illegible] ἀνόμοια· ὁ κύκλος π. χ. [illegible]

νὰ ἦναι ἰσοδύναμος μὲ ἓν τετράγωνον, μὲ ἓν τρίγωνον, κτλ. Δύο σχήματα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἡ φαινομένη των μορφὴ ἦναι ἡ αὐτὴ, πλὴν τὸ ἓν εἶναι μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ ἄλλου, ἢ ἀκριβέστερα, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ ὀνομάζονται αἱ ἔχουσαι τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο σχήματα, ἢ αἱ προσκείμεναι εἰς γωνίας ἴσας· ἐπίσης δύνανται νὰ ἦναι ὁμόλογοι καὶ αἱ γωνίαι. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τινὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιφανικῶν μονάδων τὰς ὁποίας περιέχει. Ἡ ἐπιφανικὴ μονὰς εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους, δηλ. ἕνα δάκτυλον, ἕνα πόδα, ἢ ἓν μέτρον. Οὕτως, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἐπιφάνειά τις ἔχει 100 τετραγωνικὰ μέτρα, ἐννοοῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς 100 τετράγωνα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἓν μέτρον.

Ἐκ τῶν προσκειμένων τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ὀνομάζονται, ἡ μὲν βάσις, ἡ δὲ ὕψος αὐτοῦ. Τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ὀρθογώνια, εἶναι ἴσα.

## Περὶ τοῦ μέτρου τῶν ἐπιφανειῶν.

§ 65. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν, μὲ τὸ ὕψος του· διότι ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΒΓ (σχ. 43) τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἰς 6 μέρη ἴσα μὲ τὸ μέτρον, καὶ ἐξ ἑκάστου σημείου, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται, ὑψώσωμεν τὰς καθέτους αϐ, γδ, εζ, ηθ, διαιροῦμεν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς ἄλλα 6 ὀρθογώνια ἴσα. Ἐὰν ἐπίσης διαιρέσωμεν καὶ τὸ ὕψος ΑΒ εἰς 3 μέρη ἴσα μὲ 1 μέτρον, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως σύρωμεν παραλλήλους εἰς τὴν βάσιν ΒΓ, σχηματίζομεν οὕτω 18 τετράγωνα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν 1 μέτρον. Ἀλλὰ τὰ 6 μέτρα τῆς βάσεως ΒΓ, πολλαπλασιασθέντα μὲ τὰ 3 τοῦ ὕψους, δίδουν γινόμενον 18· ἄρα ΒΓ×ΑΒ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν πλευράν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὴν ἑ-

ἐὰν ϛρέψωμεν περὶ τὴν ΔΚ τὸ μέρος ΚΟΔΒ ὥςε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΚΟΔΑ, τὸ σημεῖον Β θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α, καὶ τὸ τόξον ΔΒ ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΑ· διότι ἐὰν κοινὸν σημεῖον τοῦ πρώτου τόξου πέσῃ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ δευτέρου, θέλει ἀπέχει τότε περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἐκ τοῦ κέντρου Κ (§ 45.)· τὰ τόξα ἄρα ΔΒ, ΔΑ εἶναι ἴσα.

§ 51. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης συνάγομεν α' ὅτι πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς καὶ διαιροῦσα τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη διέρχεται ἀναγκαίως διὰ τοῦ κέντρου· διότι, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καθέτου ταύτης ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν δύο ἄκρων Α καὶ Β (§ 38.), τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου ἔχει τὴν ἰδιότητα ταύτην ὡς πρὸς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τόξου ἢ τῆς χορδῆς, ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον τοῦτο εἶναι ἓν τῶν σημείων τῆς καθέτου. β' πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνουσα τὸ τόξον ἢ τὴν χορδὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδήν, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν δύο ἄκρων Α καὶ Β τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς.

§ 52. Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου. Ἔςωσαν Α, Δ, Β, (σχ. 32.) τὰ τρία ταῦτα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἑνόνομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΔ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι χορδὴ κύκλου, καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ὑψόνομεν τὴν κάθετον ΕΚ, ἡ ὁποία πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου (§ 51.)· ὁ κύκλος λοιπὸν ὅςις θέλει διέλθει διὰ τῶν σημείων Α καὶ Δ, θέλει ἔχει τὸ κέντρον του, εἴς τι σημεῖον τῆς ΕΚ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ κέντρον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Β, πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἴς τι σημεῖον τῆς Κ καθέτου ἐπὶ τῆς χορδῆς ΒΔ. Τὸ κέντρον λοιπὸν Κ ἐπειδὴ πρέπει συγχρόνως νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΚΕ καὶ ΚΘ, κεῖται ἀναγκαίως εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ὅθεν τὸ σημεῖον Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ διερχομένου κύκλου ἐκ τῶν σημείων Α, Δ, Β· διότι ἂν φέρωμεν τὰς γραμμὰς ΚΑ, ΚΔ, ΚΒ, κατὰ πρῶτον αἱ πλάγιαι ΚΑ, ΚΔ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέχουσαι ἰσάκις ἀπὸ τὴν

[illegible] τὴν ὁποίαν ὑψώσαμεν εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς· διὰ τὸν ἴσον λόγον καὶ αἱ πλάγιαι ΚΔ, ΚΒ εἶναι ἴσαι. Αἱ τρεῖς λοιπὸν πλάγιαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως εἶναι ἀκτῖνες τῆς διερχομένης περιφερείας διὰ τῶν σημείων Α, Δ, Β, καὶ ἐχούσης κέντρον τὸ Κ.

§ 53 Τὰ μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν ΑΒ, ΔΕ, ΖΗ (σχ. 33) περιλαμβανόμενα τόξα ΑΔ καὶ ΒΕ, ΔΖ καὶ ΕΗ, κ τ λ, εἶναι ἴσα. διότι ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΛΜΝΠ κάθετον εἰς ὅλας τὰς χορδάς, θέλει τέμνει ἑκάστην εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 50.)· ἐὰν περιπλέον συγκρίνωμεν τὸ μῆκος τῶν εἰς ταύτας τὰς χορδὰς ἀντιστιχούντων τόξων, πρέπει νὰ ἔχομεν τόξ. ΠΑ= τόξ. ΠΒ, τόξ. ΠΔ= τόξ. ΠΕ, τόξ. ΠΖ= τόξ. ΠΗ, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τόξ. ΑΔ= τόξ. ΒΕ, τόξ. ΔΖ= τόξ. ΕΗ. Αἱ παράλληλοι περιλαμβάνουν λοιπὸν εἰς τὴν περιφέρειαν τόξα ἴσα.

§ 54. Οἱ ἴσας ἀκτῖνας ἔχοντες κύκλοι εἶναι ἴσοι.

Ἡ διερχομένη διὰ τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν τεμνομένων εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 34), εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διερχομένης ΓΔ διὰ τῶν σημείων τῆς τομῆς. διότι, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι χορδὴ κοινὴ τῶν δύο περιφερειῶν, ἐὰν εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ταύτης ὑψώσωμεν μίαν κάθετον, αὕτη πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τῶν δύο κέντρων Α καὶ Β (§ 51.). Ἀντιστρόφως λοιπὸν, καὶ ἡ διὰ τῶν δύο κέντρων διερχομένη ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ, διότι ἀπὸ δύο σημεῖα μίαν μόνην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (§ 6.) καὶ προσέτι τὰ δύο κέντρα Α καὶ Β ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Γ καὶ Δ τῆς χορδῆς ΓΔ.

Ἐπειδὴ ἡ διερχομένη διὰ τῶν κέντρων εὐθεῖα ΑΒ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἑνόνουσαν χορδὴν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς Γ καὶ Δ, αἱ δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ τέμνωνται εἰς τρία σημεῖα. διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνονται, καὶ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τὰ τρία ταῦτα σημεῖα, σχηματίζομεν μὲ τρεῖς χορδὰς ἓν τρίγωνον εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ ὁποίου πρέπει συγχρόνως ἡ γραμμὴ τῶν κέντρων νὰ ἦναι κάθετος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

§ 55 Τὸ διάστημα τῶν κέντρων δύο ἐκτὸς ἐφαπτομένων κύ-

...λων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀκτίνων, ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες περατοῦνται εἰς τὴν περιφέρειαν· αἱ δύο δὲ περιφέρειαι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, διότι ἐὰν ἔχουν καὶ ἄλλο, ἐκ τοῦ δευτέρου τούτου σημείου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς τὰ δύο κέντρα εὐθείας, αἵτινες μὲ τὸ διάστημα τῶν κέντρων θέλουν σχηματίσει ἓν τρίγωνον, ὅπου ἡ ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀκτίνων γραμμὴ αὕτη, θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον (§ 35) (σχ. 35, Α καὶ Β).

Ἐὰν τὸ διάστημα τῶν κέντρων ἦναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐντὸς (σχ. 35, Α καὶ Δ)· ἐὰν μικρότερον τῆς διαφορᾶς ταύτης, ὁ εἷς εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου. ἐὰν μικκρότερον τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀκτίνων, τέμνονται· διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ (σχ. 34) ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ κεφαλαίου ΑΓ+ΓΒ τῶν δύο ἀκτίνων· ἐὰν μεγαλήτερον εἷς εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

§ 56. Ἐὰν εἴς τινα κύκλον (σχ. 36) φέρωμεν μίαν διάμετρον τὴν ΑΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἄλλην κάθετον τὴν ΒΔ, διαιροῦμεν οὕτως τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (§ 46)· αἱ δύο δὲ διάμετροι τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Κ, σχηματίζουν ἐπίσης τέσσαρας γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθὴν (§ 12). Ἡ ὀρθὴ λοιπὸν γωνία περιλαμβάνει μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ὁποιαδήποτε καὶ τὸ κέντρον ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας.

Αἱ δύο ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ, ΑΚΔ, (σχ. 37) αἱ ἔχουσαι τὰς κορυφάς των εἰς τὸ κέντρον, περιλαμβάνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τόξα ἴσα· διότι ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν διὰ τῶν χορδῶν ΒΑ καὶ ΑΔ ἔχομεν δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα ἐπειδὴ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν Κ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως· ἡ πλευρὰ ΑΚ κοινὴ καὶ ΒΚ=ΚΔ ὡς ἀκτῖνες (§ 29.). Αἱ χορδαὶ λοιπὸν ΑΒ, ΑΔ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως τὰ μεταξὺ τῶν γωνιῶν ΑΚΒ, ΑΚΔ περιλαμβανόμενα τόξα ΑΒ, ΑΔ, εἶναι ἴσα. Ἀντιστρόφως· τὰ ἴσα τόξα ἀντιστιχοῦν εἰς ἴσας κεντρικὰς γωνίας.

§ 57. Ἐὰν αἱ εἰς τὸ κέντρον γωνίαι ἦναι ἄνισοι, ἀπὸ τῶν

γαλητέραν γωνίαν, μεγαλητέρα πλευρὰ (§ 33.), ἢ μεγαλητέρα χορδὴ ὑποτείνει. Ὅθεν ἡ μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα εἰς τὸ κέντρον γωνία, περιλαμβάνει μεταξὺ τῶν πλευρῶν της μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τόξον τῆς περιφερείας· ἢ τέλος τὸ τόξον ἢ ἡ χορδὴ ἀκολουθοῦν τὰς αὐτὰς μεταβολὰς τοῦ μεγέθους τῆς εἰς τὸ κέντρον γωνίας, καὶ ἀντιςρόφως.

## Περὶ τοῦ μέτρου τῶν γωνιῶν.

§ 58. Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ςαθερὸν, ἐλάβαμεν αὐτὴν ὡς μέτρον τῶν ἄλλων γωνιῶν (§ 15). ἁπλούςερον ὅμως εἶναι νὰ λάβωμεν ὡς μέτρον τὸ τόξον ΑΒ (σχ. 36) ἢ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας περιλαμβανόμενον τέταρτον τῆς περιφερείας.

Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον, διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸν κύκλον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ ἔχομεν ἑπομένως τέσσαρα τέταρτα τῆς περιφερείας δι᾽ ὧν μετρῶμεν τὰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, τὰς περιλαμβανούσας ὅλον τὸ περὶ τὸ Κ διάςημα.

Διαιροῦμεν ἔπειτα ἕκαςον τέταρτον εἰς 90 ἴσα μέρη ὀνομαζόμενα Μοίρας. ἡ περιφέρεια λοιπὸν περιλαμβάνει τετράκις 90 ἢ 360 μοίρας, ἡ ἡμιπεριφέρεια δὶς 90 ἢ 180, τὸ τρίτον τῆς περιφερείας 120, τὸ πέμπτον 72, τὸ ἕκτον 60, τὸ ὄγδοον 45, τὸ δέκατον 36, κ τ λ.

Διὰ νὰ μετρῶμεν καὶ γωνίας μικροτέρας μιᾶς μοίρας, διαιροῦμεν τὴν μοίραν εἰς 60 μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν Λεπτὰ καὶ ἕκαςον λεπτὸν εἰς 60 ἄλλα ὀνομαζόμενα Δεύτερα.

Πρὸς σύντομον παράςασιν τῶν μοιρῶν, λεπτῶν καὶ δευτέρων μεταχειρεζόμεθα τὰ σημεῖα ταῦτα $^{0}$, $'$, $''$. οὕτως $24^{0}\ 42'\ 28''$ σημαίνουν 24 μοίρας 42 λεπτὰ 28 δεύτερα.

§ 59. Ὀνομάζεται γωνία ἐγγεγραμμένη ἡ ἔχουσα, ὡς ἡ ΒΑΔ (σχ. 38), τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιλαμβανομένου τόξου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Τῷόντι ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΑΕ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΔ, τὸ τρίγω-

νον ΑΚΒ θέλει εἶναι ἰσοσκελὲς, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΚ ΚΒ εἶ-ναι ἴσαι ὡς ἀκτῖνες· αἱ δύο λοιπὸν γωνίαι ΑΒΚ, ΒΑΚ εἶναι ἴσαι (§ 32.), καὶ ἑπομένως ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΚΕ ἰσοδυναμοῦσα μὲ τὰς δύο ἀπέναντι ἐντὸς ΑΒΚ, ΒΑΚ (§ 36.) εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΚ· ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν της εἰς τὸ κέντρον, ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΒΕ, ἡ γωνία ἄρα ΒΑΚ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ γωνία ΚΑΔ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΔ· ὅθεν ΒΑΚ+ΚΑΔ, ἢ ἡ γωνία ΒΑΔ, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΕ+ΕΔ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ.

Ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 39) φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου (§ 52.), ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου θέλει ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιλαμβανομένου τόξου· ἀλλὰ αἱ τρεῖς γωνίαι περιλαμβάνουν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια μετρᾷ τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἔχουν μέτρον δύο γωνίας ὀρθὰς (§ 36).

§ 60. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΓΒ (σχ. 40) τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Γ κεῖται μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας, ἐκτείνομεν τὰς πλευράς της ΑΓ, ΒΓ ἕως νὰ συναπαντήσουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, καὶ ἑνόνομεν τὸ σημεῖον Β μὲ τὸ Ε. Τὸ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν Β καὶ Ε τοῦ τριγώνου ΒΓΕ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΑΓΒ (§ 36)· ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΕ, ἡ δὲ Ε τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒ· ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΔΕ.

Εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Γ (σχ. 41) κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας· διότι ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ ἄκρον Α τῆς πλευρᾶς ΑΓ μὲ τὸ σημεῖον Δ, ὅπου ἡ πλευρὰ ΓΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΔΒ ἐπειδὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰς δύο ἀπέναντι ἐντὸς Α καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΔΑΓ, ἡ Γ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΔΒ—Α· ἀλλ' ἡ

ἡ ΑΔΒ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ, ἡ δὲ Α τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΔ, ἄρα ἡ Γ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τοῦ κοίλου ΑΒ καὶ τοῦ κυρτοῦ ΕΔ τόξου.

§ 61. Ἡ εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΔ (σχ. 42) εἶναι ὀρθή· διότι μέτρον αὐτῆς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΟΔ, ἢ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΔ ἦναι ἰσοσκελές, καὶ κατασκευάσωμεν εἰς τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ κύκλου ἕτερον ἴσον τρίγωνον, σχηματίζομεν οὕτως ἓν τετράγωνον· δυνάμεθα λοιπὸν πάντοτε νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τινα κύκλον ἓν τετράγωνον.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ διὰ τοῦ κέντρου Κ φέρωμεν ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΚΖ, αὕτη θέλει διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΒΕ, ΑΕ (§ 51). Φέροντες λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Ε τὰς χορδὰς ΒΕ, ΑΕ, ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον ἓν ὀκτάγωνον. Δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΑΒ, εἰς ὁσαδήποτε μέρη, καὶ νὰ ἐγγράψωμεν οὕτω πολύγωνα ἐκ περισσοτέρων πλευρῶν. Ἐὰν ἐπίσης διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν τόξων ΑΕ, ΒΕ εἰς δύο, τρία, τέσσαρα, κ τ λ. ἴσα μέρη, ἐγγράφομεν πολύγωνα μὲ ἔτι περισσοτέρας καὶ μικροτέρας πλευράς. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τινα δεδομένον κύκλον πολύγωνον μ' ὁσασδήποτε πλευράς.

§ 61 δίς. Ἐπειδὴ ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων δυνάμεθα, νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου (§ 52.), ἐὰν τὰ τρία ταῦτα σημεῖα ἦναι αἱ τρεῖς κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ περιφέρεια διέρχεται ἀκόμη δι' ὅλων τῶν ἄλλων κορυφῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ δεδομένον λοιπὸν κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ὁσωνδήποτε πλευρῶν, δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον.

Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἑνὸς τετραγώνου, τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦνται θέλουν ἀπέχει ἐξ ἴσου ἐκ τοῦ σημείου Κ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι τοῦ τετρτγώνου τέμνονται (§ 39.)· ἐπομένως ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κέντρον καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, καὶ φέρωμεν μίαν περι-

φέρειαν, αὕτη θέλει ἐφάπτεται ἑκάστης τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου εἰς μόνον τὸ μέσον σημεῖον τῶν πλευρῶν τούτων.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν λέγομεν ὅτι τὸ τετράγωνόν εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον. Ἐὰν, ὡς καὶ προηγουμένως, διαιρέσωμεν τὰ ἀντιστιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου τόξα εἰς 2, 3... ἴσα μέρη σχηματίζομεν μίαν σειρὰν κανονικῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων· δυνάμεθα λοιπὸν εἰς δεδομένον κύκλον νὰ περιγράψωμεν ἓν πολύγωνον μ' ὁσασδήποτε πλευράς· καὶ ἀντιστρόφως, εἰς δεδομένον κανονικὸν πολύγωνον μ' ὁσασδήποτε πλευράς, νὰ ἐγγράψωμεν κύκλον.

## Περὶ Ἀναλογιῶν.

§ 62. Δυνάμεθα ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν γραμμῶν νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς αὐτὰς ἐργασίας ὁποίας καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Εἰμποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν γραμμήν τινα κατόπιν ἄλλης γραμμῆς, καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινα γραμμὴν τὸ μῆκος ἄλλης· ὡσαύτως νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα τὸ μέτρον καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τότε γραμμήν τινα μὲ ἄλλην, τὸ ὁποῖον σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὸ μῆκος τῶν γραμμῶν τούτων· καὶ νὰ διαιρέσωμεν γραμμήν τινα δι ἄλλης, τὸ ὁποῖον πάλιν σημαίνει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὴν πρώτην διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέτρων τῶν παριστανόντων τὴν δευτέραν. Οὕτως ὅταν μετρῶμεν μῆκός τι διὰ τοῦ μέτρου, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τόσα μέρη ἴσα μεταξύ των, καὶ ἴσα ὅλα μὲ τὸ μέτρον.

Θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω ὅτι τὸ γινόμενον γραμμῆς τινος ἐπὶ ἄλλης παριστάνει πάντοτε τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς παραλληλεγράμμου, ὅπου αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι τὰ μήκη τῶν δύο αὐτοῦ προσκειμένων πλευρῶν. καὶ ὅτι ὅταν διαιρῶμεν γραμμήν τινα δι' ἄλλης, ὑποθέτομεν ὅτι ὁ διαιρούμενος παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μία πλευρά, καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον ἡ προσκειμένη.

Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ἐν χρήσει καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν,

διότι γνωρίζοντες τρεῖς γραμμὰς Α, Β, Γ, εὐκόλως εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν τὴν τετάρτην Δ ἐκ τῆς ἀναλογίας Α: Β:: Γ: Δ· ἡ γραμμὴ αὕτη ὀνομάζεται τετάρτη ἀνάλογος.

§ 63. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἄκρον Α διὰ τοῦ μέσου Β, καὶ τὸν Γ διὰ τοῦ Δ, λαμβάνομεν τοὺς δύο λόγους $\frac{Α}{Β}$ καὶ $\frac{Γ}{Δ}$ οἱ ὁποῖοι διὰ νὰ ἦναι ἀκριβὴς ἡ ἀναλογία πρέπει νὰ ἦναι ἴσοι, δηλ. $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$.

Οἱ λόγοι τῆς ἀναλογίας, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαςον αὐτῶν μὲ τὴν αὐτὴν ποσότητα, δὲν μεταβάλλονται· οὕτως ἡ ἰσότης $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$ πολλαπλασιασθεῖσα μὲ Δ δίδει $\frac{Α \times Δ}{Β} = \frac{Δ \times Γ}{Δ}$; ἐὰν ἀπὸ τὸν δεύτερον λόγον ἐξαλείψωμεν Δ, ἔχομεν $\frac{Α \times Δ}{Β} = Γ$; δηλ. τὸν ἕνα μέσον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἄλλου μέσου. Ὡσαύτως ἡ ἰσότης $\frac{Β}{Α} = \frac{Δ}{Γ}$ πολλαπλασιασθεῖσα μὲ Γ δίδει $\frac{Β \times Γ}{Α} = Δ$· δηλ. τὸν ἕνα ἄκρον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου.

Ὅταν οἱ δύο μέσοι ὅροι ἦναι ἴσοι μεταξύ των, τὸ ὑπ' αὐτῶν παρας ανόμενον μῆκος ὀνομάζεται μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων· οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν Α: Β:: Β: Δ, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $Β^2 = Α \times Δ$ καὶ $Β = \sqrt{(Α \times Δ)}$, ἡ Β εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν γραμμῶν Α καὶ Δ.

Δυνάμεθα εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν νὰ μεταβάλλωμεν τὴν τάξιν τῶν ἄκρων, ἢ τὴν τῶν μέσων· ἢ νὰ θέσωμεν τοὺς ἄκρους εἰς τὴν θέσιν τῶν μέσων καὶ τούτους εἰς τὴν θέσιν ἐκείνων. Ἐκ τῆς ἀναλογίας Α: Β:: Γ: Δ π. χ. συνάγομεν διαδοχικῶς:

α′ ἀλλάσσοντες τοὺς ἄκρους Δ: Β:: Γ: Α;
β′ . . . . . . . . τοὺς μέσους Α: Γ:: Β: Δ;
γ′ θέτοντες τοὺς μέσους εἰς τὴν θέσιν τῶν ἄκρων Β: Α:: Δ: Γ;
καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ

ἀπὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, $A\times\Delta=B\times\Gamma$.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων, εἶναι πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πρὸς τὸν τέταρτον. Οὕτως ἐκ τῆς ἀναλογίας $A : B :: \Gamma : \Delta$ (1) λαμβάνομεν

$$A+B:B :: \Gamma+\Delta:\Delta,\quad A-B:B :: \Gamma-\Delta:\Delta, \text{ καὶ}$$

$$A\times\Delta+B\times\Delta=\Gamma\times B+B\times\Delta,\quad A\times\Delta-B\times\Delta=\Gamma\times B-B\times\Delta.$$

Αἱ ἀναλογίαι αὗται εἶναι ἀκριβεῖς, διότι δὲν ἐκάμαμεν ἄλλο, παρ' ὅτι ἐπροσθέσαμεν καὶ ἀφαιρέσαμεν ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ ἀπὸ τὸ τῶν μέσων τῆς (1) τὴν αὐτὴν ποσότητα $B\times\Delta$. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἔχουν πρὸς τὸν πρῶτον, ὡς τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πρὸς τὸν τρίτον.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων, ἔχουν πρὸς τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του· διότι ἐὰν μεταβάλωμεν τὴν τάξιν τῶν μέσων τῆς ἀναλογίας $A : B : \Gamma : \Delta$, καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, λαμβάνομεν

$$A+\Gamma : \Gamma :: B+\Delta:\Delta,\quad A-\Gamma:\Gamma :: B-\Delta:\Delta, \text{ ἢ}$$

ἀφοῦ μεταβάλωμεν τοὺς μέσους

$$A+\Gamma : B+\Delta :: \Gamma:\Delta,\quad A-\Gamma:B-\Delta :: \Gamma:\Delta.$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων $A:B :: \Gamma:\Delta :: E:Z :: H:\Theta$, τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του δηλ.

$$A+\Gamma+E+H : B+\Delta+Z+\Theta :: A:B \text{ ἢ } :: \Gamma:\Delta, \text{ κτλ.}$$

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ μὲ τὸν αὐτὸν λόγον $A : B$.

§ 64. Δύο σχήματα εἶναι ἴσα, ὅταν τεθέντος τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου, συμπίπτουν καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα· ἰσοδύναμα δὲ ἢ ὅταν αἱ ἐπιφάνειαί των (§ 2.) ἦναι ἴσαι. τὰ ἰσοδύναμα σχήματα δύνανται νὰ ἦναι πολλὰ ἀνόμοια· ὁ κύκλος π. χ. δύναται

νὰ ἦναι ἰσοδύναμος μὲ ἓν τετράγωνον, μὲ ἓν τρίγωνον, κτλ. Δύω σχήματα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἡ φαινομένη των μορφὴ ἦναι ἡ αὐτὴ, πλὴν τὸ ἓν εἶναι μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ ἄλλου, ἢ ἀκριβέςερα, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ ὀνομάζονται αἱ ἔχουσαι τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο σχήματα, ἢ αἱ προσκείμεναι εἰς γωνίας ἴσας· ἐπίσης δύνανται νὰ ἦναι ὁμόλογοι καὶ αἱ γωνίαι. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τινὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιφανικῶν μονάδων τὰς ὁποίας περιέχει. Ἡ ἐπιφανικὴ μονὰς εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους, δηλ. ἕνα δάκτυλον, ἕνα πόδα, ἢ ἓν μέτρον. Οὕτως, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἐπιφάνειά τις ἔχει 100 τετραγωνικὰ μέτρα, ἐννοοῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς 100 τετράγωνα ἕκαςον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἓν μέτρον.

Ἐκ τῶν προσκειμένων τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ὀνομάζονται, ἡ μὲν βάσις, ἡ δὲ ὕψος αὐτοῦ. Τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ὀρθογώνια, εἶναι ἴσα.

## Περὶ τοῦ μέτρου τῶν ἐπιφανειῶν.

§ 65. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν τοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν, μὲ τὸ ὕψος του· διότι ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΒΓ (σχ. 43) τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἰς 6 μέρη ἴσα μὲ τὸ μέτρον, καὶ ἐξ ἑκάςου σημείου, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται, ὑψώσωμεν τὰς καθέτους αβ, γδ, εζ, ηθ, διαιροῦμεν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς ἄλλα 6 ὀρθογώνια ἴσα. Ἐὰν ἐπίσης διαιρέσωμεν καὶ τὸ ὕψος ΑΒ εἰς 3 μέρη ἴσα μὲ 1 μέτρον, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως σύρωμεν παραλλήλους εἰς τὴν βάσιν ΒΓ, σχηματίζομεν οὕτω 18 τετράγωνα ἕκαςον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν 1 μέτρον. Ἀλλὰ τὰ 6 μέτρα τῆς βάσεως ΒΓ, πολλαπλασιασθέντα μὲ τὰ 3 τοῦ ὕψους, δίδουν γινόμενον 18· ἄρα ΒΓΧΑΒ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν πλευράν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὴν ἑ-

αὐτόν της. Τὸ γινόμενον τοῦτο τὸ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὀνομαζόμενον τετράγωνον, παριςάνεται διά τινος μικροῦ 2, θεμένου πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἄνω τοῦ πολλαπλασιαζομένου μὲ τὸν ἑαυτόν του ἀριθμοῦ· οὕτω $20^2$ σημαίνει 20 νὰ ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον ἢ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἑαυτόν του. Ὡσαύτως εἰς τὴν γεωμετρίαν $AB^2$ σημαίνει, ὅτι ἡ γραμμὴ AB πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἑαυτόν της, ἢ τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB. Ἰδοὺ ἡ σειρὰ τῶν τετραγώνων τῶν 10 πρώτων ἀριθμητικῶν ψηφίων.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ψηφία | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Τετράγωνα | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |

§ 66. Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον ἐκτείνεται μόνον μέχρι τῆς ηθ, τότε ἡ βάσις θέλει εἶναι 4 μέτρα, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ 4×3 ἢ 12 μέτρα τετραγωνικά. Ὅθεν ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν ἐπιφάνειαν 12 μέτρα τοῦ ὀρθογωνίου ταύτου, μὲ τὴν τοῦ πρώτου 18, συνάγομεν ὅτι 12 εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 18· ἀλλὰ καὶ ἡ Bθ ἢ 4 εἶναι ἐπίσης τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΓ ἢ τοῦ 6· τὰ ἰσοϋψῆ λοιπὸν ὀρθογώνια εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των. Ἐὰν τὰ ὕψη ἦναι διαφορετικὰ, συνάγωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ, ὅτι τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα ὀρθογώνια εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Ἐὰν τέλος ἡ βάσις τῶν δύο ὀρθογωνίων ἦναι διαφορετικὴ, καθὼς καὶ τὸ ὕψος των, ἀρκεῖ διὰ νὰ τὰ συγκρίνωμεν, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς ἕκαςον περιεχομένων ἐπιφανικῶν μονάδων, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου τοὺς ἐκφράζοντας τὰς ἐπιφανείας ταύτας δύο ἀριθμούς· ἀλλ' ἑκάςη τῶν ἐπιφανειῶν τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ὕψους· ὅθεν τὰ ἐμβαδὰ δύο ὀρθογωνίων ἔχουν τὸν λόγον τὸν ὁποῖον καὶ αἱ βάσεις πολλαπλασιασθεῖσαι μὲ τὰ ὕψη των.

§ 67. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου (§ 39.) ΑΒΓΔ (σχ. 44) ὁποιανδήποτε τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, καὶ ὕψος αὐτοῦ τὴν κάθετον ΑΕ ἢ τὴν μεταξὺ δύο πλευρῶν παραλλήλων ΑΖ. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ἔχει δύο ὕψη.

Τὸ παράλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· διότι ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὴν βάσιν ΒΓ ἕως εἰς τὸ Η, καὶ ἐκ τοῦ Δ κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ΔΗ, σχηματίζομεν τὸ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον ΔΓΗ, ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος μὲ τὴν ΑΒ, καθὼς καὶ ἡ κάθετος ΔΗ μὲ τὴν ΑΕ (§ 29.). Ἐὰν ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΕ καὶ τὸ θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ΔΓΗ, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΗΔ· τὰ δύο λοιπὸν ταῦτα σχήματα εἶναι ἰσοδύναμα, καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος του.

Ἐκ τούτου συνάγομεν εὐκόλως α' ὅτι τὰ ἐμβαδὰ δύο παραλληλογράμμων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις πολλαπλασιασθεῖσαι μὲ τὰ ὕψη των· β' τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα παραλληλόγραμμα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ ἔχοντα ἴσα ὕψη, ὡς αἱ βάσεις των· γ' τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα παραλληλόγραμμα, εἶναι ἰσοδύναμα·

§ 68. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 45) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ, καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΕ (§ 28, 64), τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ὕψους (§ 67), ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους, ἢ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως· ἑπομένως δύο τοῦ αὐτοῦ ὕψους τρίγωνα εἶναι ὡς αἱ βάσεις των, καὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, ὡς τὰ ὕψη των· καὶ ὅλα τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τρίγωνα, εἶναι ἰσοδύναμα.

§ 69. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο του βάσεων πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ ὕψος του. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 46), τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ΓΖ, διαιρεῖται διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΖ, καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}ΑΒ \times ΓΖ$, τὸ δὲ δεύτερον $\frac{1}{2}ΓΔ \times ΓΖ$. Τὸ κεφάλαιον τῶν δύο

τούτων γινομένων δίδει τὸ μέτρον $\frac{1}{2}$( ΑΒ+ΓΔ )×ΓΖ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τραπεζίου.

Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΔΑ, ΓΒ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ φέρωμεν τὴν γραμμὴν ΕΗ παράλληλον εἰς τὰς δύο βάσεις ΑΒ καὶ ΔΓ, ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Η φέρωμεν τὴν ΘΙ κάθετον εἰς τὰς δύο ταύτας βάσεις, καὶ ἐκτείνωμεν τὴν ΔΓ μέχρι τοῦ Ι, ἔχομεν τὰ δύο τρίγωνα ΒΗΘ, ΓΗΙ, τὰ ὁποῖα ἐπειδὴ ἔχουν τὰς εἰς τὸ Η κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, τὴν πλευρὰν ΒΗ ἴσην μὲ τὴν ΗΓ, καὶ τὰς γωνίας Γ καὶ Β ἴσας ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς ( § 26 ), εἶναι ἴσα ( § 33 ). Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ΓΙ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΘ. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Ε κατασκευάσωμεν δύο ἄλλα τρίγωνα διά τινος ἄλλης ἐπὶ τῶν βάσεων καθέτου τῆς ΑΚ, καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα τοὺς αὐτοὺς συλλογισμούς, καταντῶμεν εἰς τὴν αὐτὴν συνέπειαν, δηλ. εἰς ΑΛ=ΚΔ. Ἀλλὰ ΑΒ=ΑΛ+ΛΘ+ΒΘ, καὶ ΔΓ=ΚΙ−ΚΔ−ΓΙ· πλὴν ἐπειδὴ αἱ ΚΙ καὶ ΛΘ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ΕΗ ὡς περιλαμβανόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΚΛ, ΘΙ, καὶ περιπλέον ΚΔ=ΑΛ καὶ ΓΙ=ΒΘ, αἱ τιμαὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἄγονται εἰς ΑΒ=ΑΛ+ΕΗ+ΒΘ καὶ ΔΓ=ΕΗ−ΑΛ−ΒΘ. Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς δύο ταύτας γραμμάς, εὑρίσκομεν ΑΒ+ΔΓ = 2ΕΗ, ἢ ΕΗ= $\frac{1}{2}$[ΑΒ+ΔΓ], τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ διὰ τοῦ μέσου τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου φερομένη παράλληλος εἰς τὰς δύο βάσεις γραμμή, εἶναι μέση ἀριθμητικὴ ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων. ( α )

Ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου ἔχει μέτρον τὸ ΓΖ×ΕΗ, ἢ τὸ ὕψος του πολλαπλασιασθὲν μὲ τὴν εἰς τὰς βάσεις παράλληλον γραμμήν, τὴν τέμνουσαν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς. ( α )

---

( α ) Ὅταν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν οἱ δύο μέσοι ὅροι ἦναι ἴσοι, τὸ παρασταινόμενον ὑπ' αὐτῶν μῆκος ὀνομάζεται μέσον ἀριθμητικὸν ἀνάλογον, ἐκ τῆς ἀναλογίας Α. Β: Β. Δ π. χ. δ

§ 70. Τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 47) δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τόσα ἴσα τρίγωνα ἔχοντα τὴν κορυφὴν των εἰς τὸ κέντρον Ο τοῦ πολυγώνου, ὅσας πλευρὰς ἔχει· ἕκαστον δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἔχει μέτρον τὴν βάσιν του ΑΒ ἢ ΒΓ ἢ ΓΔ πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ κοινοῦ ὕψους ΟΙ (§ 68)· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ διαστήματος τοῦ ἐκ τοῦ κέντρου μέχρι τοῦ μέσου μιᾶς τῶν πλευρῶν, ἢ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τοῦ πολλαπλασιασθείσης μὲ τὸ διάστημα τὸ ἐκ τοῦ κέντρου μέχρι τοῦ μέσου μιᾶς τῶν πλευρῶν.

§ 71. Ὁ κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πολύγωνον κανονικὸν ἔχον ἄπειρον ἀριθμὸν πλευρῶν, ἢ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τόσον μικραὶ ὥστε ἡ ἀλλαγὴ τῆς διευθύνσεώς των μόλις γίνεται ἐπαισθητή· εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ διὰ τοῦ ἰδίου κανόνος, δι' οὗ εὕρομεν καὶ τὸ τῆς τοῦ πολυγώνου, παρατηροῦντες ὅμως ὅτι τὰ ἐκ τοῦ κέντρου μέχρι τοῦ μέσου τῶν πλευρῶν διαστήματα, ἐνόσῳ αἱ πλευραὶ αὗται ἐλαττοῦνται καὶ συγχέονται μὲ τὴν περιφέρειαν, γίνονται ἴσα μὲ τὴν ἀκτῖνα. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειάν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του· ἢ μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὴν ἀκτῖνά του.

---

του τὸ μῆκος Β, εἶναι μέσον ἀριθμητικὸν ἀνάλογον, λαμβάνομεν $2B = A + \Delta$ καὶ $B = \frac{1}{2}(A + \Delta)$.

(α) Ἡ διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΔ τοῦ τραπεζίου φερομένη εὐθεῖα ΕΗ τέμνει καὶ τὴν ΓΒ εἰς τὸ Η εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΛΕ, ΕΚΔ ἦναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ=ΕΔ ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ τὰς γωνίας ἴσας, ἡ ΕΛ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΚΕ· ἀλλὰ ΕΛ=ΗΘ, ΕΚ=ΙΗ, ἄρα καὶ ΘΗ=ΗΙ, ἐπομένως τὰ ἴσα τρίγωνα ΘΒΗ, ΗΙΓ δίδουν ΒΗ=ΗΓ.

Ἐπομένως ὁ τομεὺς (§ 47.) εἶναι ἴσος μὲ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν του περιλαμβανόμενον τόξον ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος· καὶ ἐὰν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τομέως τούτου ΘΖΒΚ (σχ. 30), ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου ΘΒΚ, λαμβάνομεν τὴν τοῦ τμήματος ΒΖΘΗ.

## Περὶ τῶν ἀναλόγων γραμμῶν καὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων.

§ 72. Ἡ φερομένη παράλληλος εἰς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, διαιρεῖ τὰς πλευράς του εἰς μέρη ἀνάλογα. Φέρομεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 48) τὴν ΔΕ παράλληλον εἰς τὴν βάσιν, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Ε, Γ καὶ Δ, σύρομεν τὰς ΒΕ, ΓΔ.

Τὰ τρίγωνα ΒΔΕ, ΔΕΓ, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ, συγχρόνως καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου εἰς τὴν βάσιν, εἶναι ἰσοδύναμα (§ 64, 63). Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ Ε, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἐπομένως εἶναι ὡς αἱ βάσεις των ΑΔ, ΒΔ· ὅθεν ἔχομεν τρ.ΑΔΕ: τρ.ΒΔΕ:: ΑΔ: ΒΔ. Διὰ τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ γνωρίζομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΓΔΕ, δίδουν τὴν ἀναλογίαν, τρ.ΑΔΕ: τρ.ΓΔΕ::ΑΕ:ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΒΔΕ· ὅθεν ἐὰν ἀντεισάξωμεν τοῦτο εἰς τὴν δευτέραν ἀναλογίαν, οἱ δύο πρῶτοι ὅροι αὐτῆς γίνονται ἴσοι μὲ τοὺς τῆς πρώτης· οἱ ἄλλοι λοιπὸν δύο ὅροι τῆς πρώτης πρέπει μὲ τοὺς δύο τελευταίους τῆς δευτέρας νὰ σχηματίζουν τὴν ἀναλογίαν ΑΔ: ΒΔ::ΑΕ:ΕΓ. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης λαμβάνομεν ἀκόμη (§ 63) ΑΔ+ΔΒ: ΔΒ:: ΑΕ+ΕΓ: ΕΓ, ἢ ΑΒ:ΒΔ:: ΑΓ:ΕΓ, ἐπειδὴ ΑΔ+ΔΒ=ΑΒ καὶ ΑΕ+ΕΓ=ΑΓ· ὡσαύτως ΑΔ+ΒΔ: ΑΔ::ΑΕ+ΕΓ:ΑΕ, ἢ ΑΒ:ΑΔ::ΑΓ:ΑΕ, διότι ΑΔ+ΒΔ=ΑΒ, καὶ ΑΕ+ΕΓ=ΑΓ.

§ 73 Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΔΕ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΑΔΓ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ΒΔ=ΔΓ, καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν ΑΔ: ΒΔ:: ΑΕ: ΕΓ, ἀντεισάξωμεν τὴν ΔΓ ἀντὶ τῆς ΒΔ, λαμβάνομεν τὴν ΑΔ:ΔΓ::ΑΕ:ΕΓ, ἡ ὁποία σημαίνει ὅτι ἡ διαιροῦσα γραμμὴ

εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ἑνὸς τριγώνου, διαιρεῖ καὶ τὴν βάσιν εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα μὲ τὰς προσκειμένας πλευράς·

§ 74 Ἐὰν σύρωμεν μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΔ, ΕΘ (σχ. 49) τὰς παραλλήλους ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, κτλ· καὶ ἐπεκτείνωμεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ταύτας ἕως ὅτου συναπαντηθοῦν εἰς τὸ Ο, συνάγομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΒΖ τὴν ἀναλογίαν ΟΒ: ΑΒ:: ΟΖ: ΕΖ. Ὡσαύτως ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΓΗ ἔχομεν ΟΒ: ΒΓ:: ΟΖ: ΖΗ· καὶ ἐπειδὴ οἱ ἡγούμενοι τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν εἶναι ἴσοι, οἱ ἑπόμενοι δίδουν ΑΒ: ΕΖ:: ΒΓ:ΖΗ. Ἐπίσης ἀποδεικνύομεν ὅτι ΒΓ: ΖΗ:: ΓΔ: ΗΘ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐὰν λοιπὸν σύρωμεν ὅσαςδήποτε παραλλήλους μεταξὺ δύο εὐθειῶν σχηματιζουσῶν ὁποιανδήποτε γωνίαν, αἱ παράλληλοι αὗται τέμνουν τὰς δύο εὐθείας εἰς μέρη ἀνάλογα.

§ 75 Δύο τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ, (σχ. 50) ἔχοντα τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ πλευραὶ αὗται ἀνάλογοι. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης, θέτομεν τὸ ἄκρον Δ τῆς βάσεως ΔΕ τοῦ τριγώνου ΔΖΕ κατόπιν τῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἐκτείνομεν ἔπειτα τὴν ΖΕ ἕως νὰ συναπαντήσῃ εἰς τὸ Ο τὴν ΒΑ ἐκβαλλομένην. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος εἰς τὴν βάσιν ΟΕ τοῦ τριγώνου ΟΒΕ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΒΑ: ΑΟ:: ΒΓ: ΓΕ· ὡσαύτως ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος εἰς τὴν ΒΟ, ἔχομεν ΒΓ: ΔΕ:: ΖΟ: ΖΕ· ἀλλὰ ΑΟ=ΔΖ καὶ ΖΟ=ΑΓ ἄρα ΑΒ: ΔΖ:: ΒΓ: ΔΕ:: ΑΓ: ΖΕ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ, ΔΖΕ εἶναι παράλληλοι, εἶναι συγχρόνως καὶ ἀνάλογοι, καὶ δίδουν ΒΟ: ΒΑ:: ΟΕ: ΑΓ· Αἱ σχηματίζουσαι λοιπὸν εὐθεῖαι ὁποιανδήποτε γωνίαν Β, καὶ τέμνουσαι τὰς παραλλήλους ΑΓ, ΟΕ, περιλαμβάνουν ἐπ' αὐτῶν μέρη ἀνάλογα μεταξύ των, καὶ ἀνάλογα τοῦ μεταξὺ τῶν σημείων τῆς τομῆς καὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Β διαστήματος. Ἡ αὐτὴ ἰδιότης ἀποδεικνύεται καὶ μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἢ τριῶν τεμνουσῶν·

§ 76 Ἐὰν στρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ περὶ τὸ Γ ὥστε αἱ πλευραί του νὰ ἔλθουν κάθετοι ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ

ΑΒΓ, νὰ λάβη δηλ. τὴν θέσιν ΓΕΖ (σχ 51.), ἐπειδὴ ἡ ἀλλαγὴ τῆς θέσεως ταύτης δὲν μεταβάλλει τοὺς λόγους τῶν γραμμῶν τούτων, συνάγομεν ὅτι τὰ ἔχοντα τρίγωνα τὰς ὁμολόγους πλευρὰς καθέτους εἶναι ὅμοια, καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ αὗται εἶναι ἀνάλογοι.

§ 77 Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (σχ. 50) τὰ ἔχοντα τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, ἔχουν ἀναγκαίως καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας. Τῳόντι ἡ γωνία Α ὡς σχηματιζομένη ἐκ μιᾶς τεμνούσης ἥτις τέμνει δύο παραλλήλους εἶναι ἴση μὲ τὴν Ο (§ 26)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον Ο=Ζ, ἄρα γων. Α = γων. Ζ· διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσαι· καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραί των εἶναι ἀνάλογοι, συνάγομεν ὅτι, ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς ἀναλόγους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀναλόγων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Τὰ ἔχοντα τρίγωνα τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ὀνομάζονται Ἰσογώνια. (α)

Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· διότι ἐὰν θέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης (σχ. 48) τὰς ἴσας γωνίας τῶν δύο τούτων τριγώνων, πρέπει, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία ΑΔ: ΑΒ:: ΑΕ: ΑΓ, ἡ ΔΕ νὰ ἦναι παράλληλος (§ 72) εἰς τὴν ΒΓ (§ 75).

§ 78. Δύο πολύγωνα ἔχοντα τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀναλόγους ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια. Ἔςωσαν τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αβγδεζ, (σχ. 52) τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀναλόγους, καὶ τῶν ὁποίων ἑνόνομεν τὰς κορυφὰς Α, Γ καὶ α, γ. Ἐπειδὴ ἡ αβ εἶναι παράλληλος εἰς τὴν ΑΒ καὶ ἡ βγ εἰς τὴν ΒΓ, ἡ γωνία β εἶναι ἴση μὲ τὴν Β. ὅθεν τὰ δύο τρίγωνα αβγ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια (§ 77) ἐπειδὴ ἔχουν μίαν γω-

---

(α) Ὅταν αἱ δύο γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ἑνὸς ἄλλου, καὶ ἡ τρίτη τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ ἄλλου καὶ τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια.

νίαν ἴσην καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ: αϐ:: ΒΓ: ϐγ. Ἑνώνοντες διαδοχικῶς τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ, Γ καὶ Ε, ϐ καὶ δ, γ καὶ ε, σχηματίζομεν μίαν σειρὰν τριγώνων, ἐπὶ τῶν ὁποίων κάμνομεν τοὺς ἰδίους συλλογισμούς, καὶ λαμβάνομεν τὴν σειρὰν τῶν ἀναλογιῶν ΑΒ : αϐ:: ΒΓ: ϐγ:: ΓΔ: γδ:: ΔΕ: δε, κτλ, ἡ ὁποία δεικνύει ὅτι τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀναλόγους. Αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων τούτων πολυγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί των, διότι εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀναλογιῶν ΑΒ:αϐ::ΒΓ:ϐγ::ΓΔ:γδ:: ΔΕ:δε:: ΕΖ:εζ εὑρίσκομεν ὅτι (§ 63), τὸ κεφάλαιον ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΖ τῶν ἡγουμένων, ἢ ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου πολυγώνου, εἶναι πρὸς τὸ κεφάλαιον αϐ+ϐγ+γδ+δε+εζ τῶν ἑπομένων, ἢ πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου, ὡς εἷς ἡγούμενος ΑΒ πρὸς τὸν ἑπόμενόν του αϐ, ἢ ὡς ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ πρώτου πρὸς τὴν ὁμόλογόν της αϐ τοῦ δευτέρου.

§ 79. Τὰ ἰσαρίθμους πλευρὰς ἔχοντα κανονικὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια. Ἔστωσαν π. χ. τὰ δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αϐγδεζ (σχ. 52). Τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ πρώτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τοῦ δευτέρου, δηλ. 2 (6—2) =8 (§ 43)· ἀλλ' ἡ γωνία Α εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ κεφαλαίου τούτου (§ 43) καθὼς καὶ ἡ α, ἄρα αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι· κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἄλλου. Περιπλέον, αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι, οὖσαι ἴσαι καὶ εἰς τὸ ἓν καὶ εἰς τὸ ἄλλο. Τὰ δύο λοιπὸν σχήματα εἶναι ὅμοια ἐπειδὴ ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους (§ 64). Καὶ αἱ περίμετροι λοιπὸν δύο κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί των ΒΓ, ϐγ· ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΟΓ, ϐογ καὶ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων ΒΟΗ, ϐοη συνάγομεν ΒΓ: ϐγ:: ΒΟ: ϐο:: ΟΠ: οη· ὅθεν τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὡς αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου πρὸς τὰς κορυφάς, ἢ πρὸς τὸ μέσον τῶν πλευρῶν.

Ἐπειδὴ πᾶσα περιφέρεια θεωρεῖται ὡς πολύγωνον κανονικὸν ἔχον ἀπείρους πλευρὰς (§ 71), οἱ κύκλοι πρέπει νὰ ἦναι σχήματα ὅμοια, σχήματα δηλ. εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ὁμοίως κείμεναι γραμμαὶ εἶναι ἀνάλογαι. Ἐπειδὴ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς φερομένας ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὰς κορυφὰς εὐθείας, καὶ αἱ γραμμαὶ αὗται δὲν εἶναι παρὰ ἀκτῖνες, συνάγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες ἢ αἱ διάμετροι.

## Περὶ τῶν μέσων ἀναλόγων καὶ τοῦ Ὀρθογωνίου τριγώνου.

§ 80. Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου τινὸς (σχ. 53) κατασκευάσωμεν ὁποιονδήποτε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (§.61) ἔχον τὴν κορυφὴν του Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς ταύτης φέρωμεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τῆς διαμέτρου, συνάγομεν ὅτι

α΄ Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας, τὴν Α κοινήν, τὰς Γ καὶ Δ ὀρθάς, καὶ τὴν ΑΒΓ=ΑΓΔ, ἐπειδὴ ἐὰν εἰς κάθε μίαν προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν γωνίαν Α, σχηματίζομεν μίαν ὀρθήν· ἑπομένως ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ: ΑΓ:: ΑΓ: ΑΔ, ἡ ὁποία δεικνύει ὅτι ἡ κάθετος ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος (§ 63) μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ καὶ τοῦ τμήματος ΑΔ ταύτης τῆς ὑποτεινούσης τοῦ προσκειμένου εἰς τὴν ΑΓ· ἢ $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΑΔ$.

β΄ Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοί των πλευραὶ δίδουν ΑΒ: ΒΓ:: ΒΓ: ΒΔ, ἢ τὴν κάθετον ΒΓ μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ καὶ τοῦ τμήματος ΒΔ τῆς ὑποτεινούσης ταύτης τοῦ προσκειμένου εἰς τὴν ΒΓ· ἢ $ΒΓ^2 = ΑΒ \times ΒΔ$.

γ΄ Τὰ εἰς τὸ Δ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἀκόμη ὅμοια, ἐπειδὴ ἡ γωνία Β=ΑΓΔ, καὶ ἡ γωνία Α=ΒΓΔ, καὶ αἱ ὁμόλογοί των πλευραὶ δίδουν ΑΔ: ΔΓ:: ΔΓ: ΒΓ, ἢ τὴν κάθετον ΓΔ

μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΑΔ καὶ ΒΔ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ· ἢ $ΔΓ^2 = ΑΔ \times ΒΔ$.

§ 81. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Ἔςω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 54), καὶ Γ ἡ ὀρθὴ αὐτοῦ γωνία. Ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν του κατεσκευάζομεν τὰ τετράγωνα Η, Ε, Ζ, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ. Εἴδομεν ὅτι ἡ κατασκευὴ αὕτη δίδει τὰς δύο ἰσότητας (§ 80 ά καὶ 6′), $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΑΔ$, καὶ $ΒΓ^2 = ΑΒ \times ΒΔ$· ἐὰν προσθέσωμεν ταύτας μέλος πρὸς μέλος, λαμβάνομεν $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = ΑΒ[ΑΔ + ΒΔ]$· καὶ ἐπειδὴ $ΑΔ + ΒΔ = ΑΒ$, εὑρίσκομεν $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = ΑΒ^2$ (1)· ἢ μὲ ἄλλας λέξεις τὸ ἐπὶ τῆς ΑΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον, πλέον τοῦ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἰσοῦνται μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ κατασκευαζόμενον. Ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἀφαιρέσωμεν $ΒΓ^2$, λαμβάνομεν $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2$. ἤτοι τὸ ἐπὶ τῆς ΑΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ κατασκευαζόμενον μεῖον τοῦ ἐπὶ τῆς ΒΓ.

Ἡ πρότασις αὕτη δύναται ἀκόμη ν' ἀποδειχθῇ μηχανικῶς. Εἰς τὰ σχήματα 54 δὶς καὶ τρὶς, ἐδιαιρέσαμεν τὰ μικρὰ τετράγωνα εἰς μέρη ἀντιςτιχοῦντα ἀκριβῶς εἰς τὰ τοῦ μεγάλου. Τὰ μέρη τῶν μικρῶν τετραγώνων, ἀντιςτιχοῦν εἰς τὰ μέρη τοῦ μεγάλου τὰ ἔχοντα τοὺς αὐτοὺς ἀριθμούς· καὶ ἐὰν θέσωμεν τὰ μέρη τῶν μικρῶν ἐπὶ τῶν μερῶν τοῦ μεγάλου, θέλουν ἐφαρμοσθῇ ἐντελῶς.

## Περὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων.

§ 82. Ἔςωσαν τὰ δύο ὅμοια ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα (σχ. 55) ΑΒΓΔ, αβγδ, τῶν ὁποίων παριςάνομεν τὰς ἐπιφανείας διὰ ἐπ.ΑΔ καὶ ἐπ.αδ. Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων τούτων ὀρθογωνίων ἔχουν τὸν λόγον τὸν ὁποῖον καὶ αἱ βάσεις πολλαπλασιασθεῖσαι μὲ τὰ ὕψη των (§ 66), λαμβάνομεν ἐπ.ΑΔ: ἐπ.αδ: : $ΑΒ \times ΒΔ : αβ \times βδ$· πλὴν ἐπειδὴ αἱ βάσεις ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὰ ὕψη, προκύπτει ΑΒ: αβ: : ΒΔ: βδ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀναλογίαν ταύτην μὲ τὸν λόγον ΒΔ: βδ

(§ 63) λαμβάνομεν ΑΒ×ΒΔ: αβ×βδ:: $ΒΔ^2$: $βδ^2$, καὶ συγκρίνοντες την μὲ τὴν προηγουμένην ἔχομεν, ἐπ·ΑΔ: ἐπ· αδ:: $ΒΔ^2$: $βδ^2$· ὅθεν αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων ὀρθογωνίων, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν·

§ 83 Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύεται ἡ αὐτὴ ἰδιότης καὶ ὅταν τὸ παραλληλόγραμμον δὲν ἦναι ὀρθογώνιον. Ἡ ἀπόδειξις λοιπὸν αὕτη ἀνάγεται εἰς ὁποιονδήποτε παραλληλόγραμμον. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου, ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους (§ 68), ἕπεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια σχήματα ἀναλύονται εἰς τρίγωνα ὅμοια (§ 78), τὰ ὁποῖα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, συνάγεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι ὅλων τῶν ὁμοίων σχημάτων (τριγώνων, τετραπλεύρων, πολυγώνων), εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν·

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι σχήματα ὅμοια, ἕπεται [§ 71, 79] ὅτι αἱ ἐπιφάνειαί των εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, ἢ τῶν διαμέτρων των·

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον, αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τομέων δύο κύκλων, εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων τούτων.

## Περὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου, τοῦ μέτρου τῶν γωνιῶν, καὶ περὶ τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν.

§ 84 Ἐὰν εἴς τινα κύκλον ἐγγράψωμεν ἓν τρίγωνον ὀρθογώνιον (σχ. 42), καὶ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΑ, ὥςε νὰ διαιρῇ τὴν βάσιν εἰς δύο ἴσα μέρη, θέλομεν ἔχει δύο ἄλλα ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ τρίγωνα (§ 38)· Τὸ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἑνὸς τούτων κατασκευαζόμενον τετράγωνον, εἶναι ἴσον μὲ τὰ ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν ΑΚ καὶ ΒΚ κατασκευαζόμενα (§81), δηλαδὴ $ΑΒ^2 = ΑΚ^2 + ΒΚ^2$. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὰς δύο ἀκτῖνας ΑΚ

πλευρὰ BK ἴσας μὲ τὴν μονάδα, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $AB^2=1+1$, ἢ $AB=\sqrt{2}$, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς μονάδος εἶναι ἡ ἰδία μονάς. Διὰ νὰ λάβωμεν λοιπὸν τὴν τιμὴν τῆς AB, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 2· ἡ ῥίζα αὕτη εἶναι ὡς ἔγγιστα 1,4142 (σελ. 83), καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκριβῆ τιμὴν, ὅσα δεκαδικὰ καὶ ἂν λάβωμεν.

Ὅθεν, ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον BAΔO ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι AK ἢ BK (§ 61), ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τετραγώνου δὲν ἔχει μέτρον κοινὸν μὲ τὴν ἀκτῖνα τούτου τοῦ κύκλου, ἢ ὅτι αἱ δύο αὗται γραμμαὶ εἶναι ἀσύμμετροι (σελ. 81).

§ 85. Ἀσύμμετρος προσέτι εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ AE τοῦ ὀκταγώνου μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα KE κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB τοῦ τετραγώνου· ἑνόνομεν τὸ E μὲ τὰ σημεῖα A καὶ B, καὶ σχηματίζομεν τὸ ὀκτάγωνον τοῦτο (§ 61.). Ἐπειδὴ διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἡ ὀρθὴ γωνία K ἐδιαιρέθη εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 38, 50), καὶ προσέτι ἡ εἰς τὴν περιφέρειαν γωνία B ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τετάρτου AΔ τῆς περιφερείας (§ 59.), τὰ τρίγωνα BZK, AZK εἶναι ἰσοσκελῆ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AZK δίδει $AK^2=AZ^2+ZK^2=2\,AZ^2$ (1), διότι $AZ=ZK$. Ὡσαύτως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AEZ δίδει $AE^2=EZ^2+AZ^2$ (2)· ἀλλὰ $EZ=EK-ZK=AK-AZ$· ἀντεισάγοντες λοιπὸν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς EZ εἰς τὴν (2), λαμβάνομεν $AE^2=[AK-AZ]^2+AZ^2=[AK-AZ]\times[AK-AZ]+AZ^2=AK^2-2\,AK\times AZ+AZ^2+AZ^2=AK^2-2\,AK\times AZ+2\,AZ^2$. Θέτοντες ἐνταῦθα τὴν τιμὴν τῆς AZ ἐκ τῆς (1), ἔχομεν $AE^2=AK^2-2\,AK\times AK\sqrt{\frac{1}{2}}+AK^2=2AK^2-2AK^2\sqrt{\frac{1}{2}}=2\,AK^2[1-\sqrt{\frac{1}{2}}]$, ἢ $AE=AK\sqrt{[2-\sqrt{2}]}$ [σελ. 83]· ὅθεν ἡ πλευρὰ AE τοῦ ὀκταγώνου εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἐκτελοῦντες τὴν ἀπόδειξιν ταύτην εἰς πολύγωνα ἐκ περισσοτέρων πλευρῶν, εἰς τὸ δεκαεξάγωνον π. χ., λαμβάνομεν $AH=AK\sqrt{[2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}]}$, ὅπου ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σ-

σύμμετρος ποσότης, δεικνύει φανερὰ ὅτι δὲν ὑπάρχει μέτρον κοινὸν μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΗ τοῦ δεκαεξαγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΚ. Ἡ ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ἑνὸς πολυγώνου ἀπόδειξις αὕτη, ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου, καὶ εἰς τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια εἶναι πολύγωνον ἔχον ἄπειρον ἀριθμὸν πλευρῶν [71, 79], συνάγομεν ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ἀκτῖνα ἢ τὴν διάμετρον, εἶναι ἀσύμμετρος.

§ 86. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω καὶ ζητοῦντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐκ 32, 64, 128 πλευρῶν, καταντῶμεν τέλος εἰς πολύγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι τόσον μικρὰ: καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του τόσον μέγας, ὥςε ἡ διαφορά του πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι ἐλαχίςη. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν διά τινος ἰσότητος ὁμοίας μὲ τὴν ἀνωτέρω, μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου: εὑρίσκομεν οὕτω τὸν ὡς ἔγγιςα τῆς περιφερείας λόγον πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἢ πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἀλλὰ διὰ νὰ προσεγγίσωμεν ἀκόμη περισσότερον εἰς τὴν τιμὴν τοῦ λόγου τούτου, ὑποθέτομεν καὶ δεύτερον πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ ὁποῖον κατ' ὀλίγον συγχέεται μ' αὐτὴν, ὅταν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του. Αὐξάνομεν οὕτω τὰς πλευρὰς τῶν δύο πολυγώνων, μέχρις ὅτου οἱ ἐκφράζοντες ἀριθμοὶ τὰς περιμέτρους αὐτῶν νὰ ἦναι οἱ αὐτοὶ κατὰ τὰ 5, 10, 15 ἢ 20 πρῶτα δεκαδικὰ, καὶ λαμβάνομεν τὸν μὲ τὰ 5, 10, 15 ἢ 20 δεκαδικὰ ἀριθμὸν τοῦτον, ἀντὶ τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν· διότι, ἐπειδὴ ὁ κύκλος πρέπει πάντοτε νὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, ἐὰν ταῦτα δὲν διαφέρουν μεταξύ των παρὰ κατά τινα ἐλαχίςην ποσότητα, ὁ κύκλος θέλει διαφέρει ἑνὸς τούτων ἀκόμη ὀλιγώτερον.

§ 87. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης, ἢ δι' ἄλλων συντομωτέρων ἐκτέλεσαν τὰς ἐργασίας ταύτας, καὶ εὗρον ὅτι ὁ λόγος τῆς διαμ-

-μέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι ἴσος μὲ 3,1415926· ὑποθέτοντες ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις ἡ διάμετρος φερομένη ἐπὶ τῆς περιφερείας περιέχεται εἰς αὐτὴν 3,1415926 φορὰς περίπου.

Ὁ Ἀρχιμήδης, ὅςις ἔζη τρεῖς αἰῶνας πρὸ Χριςοῦ εὗρεν, ἐγγράφων τὸ ἐξ 96 πλευρῶν πολύγωνον τὸν λόγον τοῦτον ἴσον μὲ $3\frac{10}{71}$ ἢ μὲ $3\frac{1}{7}$· ὁ λόγος ὅμως οὗτος δὲν εἶναι τόσον ἀκριβής, καὶ πρέπει νὰ προτιμήσωμεν διὰ τὴν πρᾶξιν τὸν $\frac{355}{113}$, εὑρεθέντα παρὰ τοῦ Μητίου [Métius] ὅςις εἶναι ἀκριβέςερος καὶ εὐκολοενθύμητος ὡς συγκείμενος ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, ἐπανερχομένων δὶς ἐξ ἀριςερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἀρχομένων ἐκ τοῦ παρονομαςοῦ.

Διάφοροι μαθηματικοὶ ἐξέτειναν περισσότερον τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λόγου τούτου, μάλιςα ὁ Βέγας [Vega] εὗρεν αὐτὸν μὲ 140 δεκαδικά.

§ 88 Διὰ συντομίαν παριςάνομεν τὸν λόγον 3,1415926 τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ γράμματος π. Ἐπειδὴ ὑποθέσαμεν τὴν διάμετρον ἴσην μὲ τὴν μονάδα [§ 87], εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ λόγος οὗτος εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μονάς. Εἴδομεν [§ 79] ὅτι αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς αἱ διάμετροι· διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας Π, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 8 μονάδες, κάμνομεν τὴν ἀναλογίαν ταύτην· ἡ περιφέρεια π τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 1 ἔχει πρὸς ταύτην τὴν διάμετρον, ὡς ἡ περιφέρεια Π πρὸς τὴν διάμετρόν της 8· ἢ π: 1:: Π: 8. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης προσδιορίζομεν τὴν ἄγνωςον περιφέρειαν Π, καὶ ἔχομεν Π=8π, ἢ Π=25, 1327408· Ἐνγένει διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διάμετρόν της μὲ τὸν ἀριθμὸν π= 3, 1415926, τὸν παριςάνοντα τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 1, ἢ τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν. Παριςάνομεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συντομώτερα, ὑποθέτοντες Δ τὴν διάμετρον τῆς περιφερείας Π· ἡ περιφέρεια τότε παριςάνεται διὰ τοῦ τύπου Π= πΔ· Ἐὰν λά-

βωμεν ἀντὶ τῆς διαμέτρου τὴν ἀκτῖνα Α, ὁ τύπος γίνεται Π=2πΑ, διότι Δ=2Α.

§ 89. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειάν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος (§ 71.). Ἀλλὰ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἔχοντος κύκλου διάμετρον τὴν μονάδα, καὶ περιφέρειαν 3,1415926, ἢ π εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ ἄρα $\frac{\pi}{4}$ παριςάνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μονάς.

Ἔςω ἄλλος τις κύκλος, τοῦ ὁποίου παριςάνομεν τὴν ἐπιφάνειαν διὰ ἐπ. ΑΒ, καὶ 2Α ἡ διάμετρός του, ἢ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ νέου τούτου κύκλου μὲ τὴν τοῦ πρώτου· ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι δύο κύκλων εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων των (§ 83), ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν, $\frac{\pi}{4}$ : ἐπ. ΑΒ :: 1 : $4Α^2$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ἐπ. ΑΒ = π $Α^2$. Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια ὁποιουδήποτε κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνός του πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν π.

## Περὶ τῶν ἐπιπέδων καὶ τῶν ςερεῶν γωνιῶν.

§ 90. Πᾶσα εὐθεῖα ΓΔ [σχ. 56] κάθετος εἰς ὅλας τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Γ διερχομένας εὐθείας, εἶναι ἐπίσης κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· διότι ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΗΕ ἕκαςον σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἐξ ἴσου [§ 9, 37, 30] ἐκ τῶν ἰσάκις ἐκ τοῦ Γ ἀπεχόντων σημείων Ε καὶ Η. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη ἐπειδὴ ἐφαρμόζεται καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν φερομένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς τῆς ΓΔ, συνάγομεν ὅτι ἡ γραμμὴ αὕτη μὴ κλίνουσα πρὸς κανὲν μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι κάθετος εἰς αὐτό.

§ 91. Ἐκ τῶν ὅσων εἴπομεν περὶ καθέτων [§ 6, 9, 11], συνάγομεν ὅτι ἡ κάθετος εἶναι ἡ συντομωτέρα γραμμὴ ἀφ' ὅσας

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐξ ἑνὸς δεδομένου ἐκτὸς αὐτοῦ σημείου, καὶ ὅτι ἐξ ἑνὸς σημείου δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου παρὰ μίαν μόνην κάθετον.

§ 92. Αἱ ἐκ δύο δεδομένων σημείων φερόμεναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλοι [§ 28]· διότι ἐὰν μία τούτων ἔκλινεν ὁπωσδήποτε, δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον.

Ἐὰν καθ' ὁποιανδήποτε διεύθυνσιν φέρωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ [σχ. 57] τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, καὶ ἐκ τῆς εὐθείας ταύτης ὑψώσωμεν νέον ἐπίπεδον κάθετον, ἢ κλίνον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ· αἱ δύο συρόμεναι παράλληλοι γραμμαὶ ΓΕ, ΔΖ εἰς τὸ νέον τοῦτο ἐπίπεδον, καὶ ἔχουσαι τὸν πόδα των ἐπὶ τῆς ΓΔ, θέλουν κλίνει ἰσάκις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Τῳόντι, ἐπειδὴ αὗται εἶναι παράλληλοι, ἡ τέμνουσα ΓΔ σχηματίζει μ' αὐτάς, τὰς ἴσας γωνίας Γ καὶ Δ [§ 26] αἵτινες παριστάνουν τὴν κλίσιν αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ· αἱ κείμεναι λοιπὸν παράλληλοι εἰς τὸ ἐπίπεδον, τὸ τέμνον τὸ ΑΒ ὑπὸ ὁποιανδήποτε κλίσιν, καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ ποδός αὐτῶν Γ καὶ Δ, κλίνουν ἰσάκις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Ἀντιςρόφως· δύο εὐθεῖαι κλίνουσαι ἰσάκις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ εὑρισκόμεναι ὁλόκληροι εἴς τι ἐπίπεδον τέμνον τὸ πρῶτον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ποδός των, εἶναι παράλληλοι.

§ 93 Ἡ κοινὴ τομὴ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα· διότι ἐὰν ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς των εὑρίσκωνται τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ τρία ταῦτα σημεῖα δὲν δύνανται ν' ἀνήκουν μήτε εἰς τὸ ἓν μήτε εἰς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον, ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου (§ 2), ὅλα τὰ σημεῖά του πρέπει νὰ ἐφάπτωνται μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθ' ὁποιανδήποτε διεύθυνσιν καὶ ἂν τὴν θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

§ 94 Ἐὰν ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΡΣ δύο ἐπιπέδων (σχ. 58) φέρωμεν τὰς καθέτους ΠΟ, ΞΟ, τὴν μίαν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΔΓ· τὴν ἄλλην εἰς τὸ ΑΒ, ἡ γωνία ΠΟΞ θέλει μετρᾷ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς τομῆς των. Τῳόντι, ἡ γραμμὴ ΟΠ κινουμένη καθέτως κατὰ τὸ μῆκος τῆς τομῆς

ΡΣ, μένει πάντοτε εἰς τὸ ἐπίπεδον ΔΓ, καθὼς καὶ ἡ γραμμὴ ΞΟ μένει κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ· ἐπομένως ὅπου καὶ ἂν συναπαντηθοῦν οἱ πόδες τῶν δύο τούτων εὐθειῶν αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουν σχηματίσει τὴν ἰδίαν γωνίαν ΠΟΞ· Ἐὰν ἤδη σρέψωμεν περὶ τὴν ΡΣ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, ἡ γωνία ΠΟΞ θέλει αὐξήσει ἢ ἐλαττωθῆ κατὰ τὴν διεύθυνσιν καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον σρέφεται, διότι αἱ σχηματίζουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι ἀκολουθοῦν τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται· ἡ σχηματιζομένη λοιπὸν γωνία ἐκ τῶν καθέτων ΠΟ, ΞΟ εἰς τὴν γραμμὴν τῆς τομῆς, μετρᾷ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὸ σημεῖον Ο· καὶ ἐπειδὴ ἐνῷ αἱ γραμμαὶ αὗται κινούμεναι κατὰ τὴν τομὴν ΡΣ μένουν εἰς τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, ἡ γωνία αὕτη μετρᾷ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς τομῆς των.

§ 95. Πολλαὶ μεταξὺ τῶν παραλλήλων γραμμῶν ἰδιότητες ἐφαρμόζονται καὶ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων. Οὕτω, δύο εὐθεῖαι, ἢ δύο ἐπίπεδα περιλαμβανόμενα μεταξὺ ἐπιπέδων παραλλήλων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα· ὁμοίως (§ 73.) πολλὰ ἐπίπεδα παράλληλα ἄλλου ἐπιπέδου εἶναι καὶ παράλληλα μεταξύ των.

Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπίτινος τρίτου ἢ εἶναι παράλληλα, ἢ τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν κάθετον εἰς τὸ τρίτον τοῦτο ἐπίπεδον. Τὰ ἐξ ἑνὸς τρίτου τεμνόμενα δύο παράλληλα ἐπίπεδα, σχηματίζουν γωνίας αἵτινες ἔχουν τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, καὶ φέρουν τὸ αὐτὸ ὄνομα ὡς καὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας (§ 26).

§ 96. Αἱ τεμνόμεναι δύο εὐθεῖαι ἐπί τινος ἐπιπέδου, προσδιορίζουν τὴν θέσιν του· διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται κατὰ πρῶτον διὰ τῆς μιᾶς τούτων τῶν γραμμῶν, καὶ τὸ σρέψωμεν περὶ ταύτην, ἕως νὰ συναπαντήσῃ τὴν ἄλλην, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησίν του, χωρὶς ν' ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ ταύτην· ἐπομένως ἡ θέσις του προσδιορίζεται ἅμα διέλθῃ διὰ τῶν δύο τούτων γραμμῶν. Πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον ἐπίσης διὰ τῶν δύο τούτων γραμμῶν, σχηματίζει μὲ τὸ πρῶτον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπε-

δον. Ἐκ δύο λοιπὸν τεμνομένων εὐθειῶν ἓν μόνον ἐπίπεδον δύναται νὰ διέλθῃ.

§ 97. Ὀνομάζεται γωνία Δίεδρος ἡ σχηματιζομένη ΠΟΞ (σχ. 58) ἐκ δύο ἀμοιβαίως τεμνομένων ἐπιπέδων. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἦναι κάθετα, ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή, καὶ πρὸς ταύτην ἀναφέρονται ὅλαι αἱ ἄλλαι.

Αἱ δίεδροι, ἢ αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἐξ ἐπιπέδων τεμνομένων (§ 59) μετρῶνται ἐξ ἑνὸς τόξου κύκλου καταγραφομένου καθέτως εἰς τὰς ἐπιφανείας τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἀκτὶς τοῦ ὁποίου εἶναι ἀποιαδήποτε εὐθεῖα, καὶ κέντρον ἓν ἐκ τῶν σημείων τῆς τομῆς των.

§ 98 Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (σχ. 59) σχηματίζουν τέσσαρας διέδρους γωνίας, τὰς ΠΟΞ, ΞΟΡ, ΡΟΣ, ΣΟΠ, ἰσοδυναμούσας μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΠΟΞ, ΡΟΣ καὶ ΣΟΠ, ΞΟΡ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, αἱ δὲ ἐφεξῆς ΣΟΠ, ΠΟΞ, κλ. ἴσαι μὲ δύο γωνίας ὀρθάς (§ 22, 26).

Πολλὰ ἐπίπεδα τεμνόμενα κατά τινα εὐθεῖαν, σχηματίζουν διέδρους γωνίας τόσας, ὅσα εἶναι τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα· τὸ κεφάλαιον ὅλων τούτων τῶν διέδρων γωνιῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς, καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

§ 99. Τρία ἐπίπεδα τεμνόμενα ἀνὰ δύο κατὰ μὴ παραλλήλους εὐθείας, συναπαντῶνται ἀναγκαίως εἰς ἓν σημεῖον, καὶ σχηματίζουν τὴν ὀνομαζομένην Τρίεδρον ςερεὰν γωνίαν· ἡ τομὴ τῶν τριῶν τούτων ἐπιπέδων μᾶς δίδει τὴν κορυφὴν Κ (σχ. 60), τρεῖς πλευρὰς ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΑΚΓ, τρεῖς διέδρους γωνίας σχηματιζομένας ἐκ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ, ΒΚΓ καὶ ΑΚΓ, ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ καὶ τέλος τὴν εἰς τὸ Κ τρίεδρον γωνίαν.

Ἐὰν τέσσαρα ἐπίπεδα τεμνόμενα ἀνὰ δύο συναπαντῶνται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων περιλαμβανόμενον διάςημα σχηματίζει τὴν Τετράεδρον ςερεὰν γωνίαν

ἡ ὁποία περιέχει μίαν κορυφὴν τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας, τέσσαρας διέδρους, καὶ τέσσαρας πλευράς.

Ἐγένει ὀνομάζεται πολύεδρος ςερεὰ γωνία τὸ σχηματιζόμενον γωνιαῖον διάςημα ἐκ πολλῶν ἐπιπέδων γωνιῶν συνερχομένων εἰς τὴν αὐτὴν κορυφήν.

## Περὶ Πολυέδρων.

§ 100 Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς πολυέδρου τινὸς γωνίας κρεμάσωμεν μίαν μολυβδίδα, καὶ καθέτως ταύτης φέρωμεν ἓν ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει τέμνει καὶ τὰ τῆς πολυέδρου γωνίας εἰς εὐθείας σχηματιζούσας τρίγωνον, τετράγωνον, τετράπλευρον, ἢ ὁποιονδήποτε πολύγωνον, καθόσον ἡ γωνία αὕτη εἶναι τριέδρος, τετράεδρος ἢ πολύεδρος· οὕτως ἀποχωρίζομεν ἓν ςερεόν, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν μορφήν του λαμβάνει καὶ διαφόρους ὀνομασίας.

Ὀνομάζεται ςερεὸν Πολύεδρον, ἢ ἁπλῶς Πολύεδρον, κάθε ςερεὸν περατούμενον ἐξ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τεμνόμενα σχηματίζουν γωνίας πολυέδρους. Τὰ πολύεδρα ταῦτα δύνανται νὰ ἦναι κανονικὰ ἢ ἀκανόνιςα (α).

Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἁπλουστέρου πολυέδρου ἀπαιτοῦνται τοὐλάχιστον τέσσαρα ἐπίπεδα. Διάφορα πολύεδρα ἔλαβον ὀνομασίας ἰδιαιτέρας ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν τὰς ὁποίας ἔχουν· ὅθεν ὀνομάζεται τετράεδρον τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας, ἑξάεδρον, ὀκτάεδρον, δωδεκάεδρον, εἰκοσάεδρον, τὸ ἔχον ἕξ, ὀκτώ, δώδεκα, κ τ λ.

§ 101. Ἐὰν λάβωμεν ὁποιονδήποτε κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 61), καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὑψώσωμεν τὴν κάθετον, τὴν ὀνομαζομένην γεννήτριαν (§ 4), καὶ κινήσωμεν αὐτὴν καθέτως ὥςε νὰ διατρέξῃ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καταγράφομεν τὸ πολύεδρον, τὸ ὀνομαζόμενον Πρίσμα. Τὸ

(α) Κανονικὰ πολύεδρα ὀνομάζονται ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα.

πολύγωνον ὀνομάζεται βάσις τοῦ πρίσματος. Ἐὰν κόψωμεν τὸ πρίσμα τοῦτο παραλλήλως εἰς τὴν βάσιν του, ἡ τομὴ αβγδεζ θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ πρῶτον, τὸ δὲ μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν πολυγώνων τούτων διάςημα εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικὸν, ὅταν ἡ βάσις του ἦναι τρίγωνον· τετραγωνικὸν, ὅταν τετράπλευρον· πενταγωνικὸν, ἑξαγωνικὸν· ὅταν κ. τ. λ.

Ὅταν ἡ γεννήτρια ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου, τὸ πρίσμα λέγεται Ὀρθὸν, ὅταν δὲ κλίνῃ ὁπωςδήποτε, Πλάγιον· τὸ ὕψος τούτου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κάτω πολυγώνου, καὶ συναπαντῶσα κατ' ὀρθὴν γωνίαν τὴν ἐκβαλλομένην γραμμὴν παραλλήλως εἰς τὸ πολύγωνον τοῦτο ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου πολυγώνου.

§ 102. Τὸ πρίσμα ὀνομάζεται Παραλληλεπίπεδον ὅταν ἡ βάσις του ἦναι παραλληλόγραμμον. Ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ πρίσματος τούτου σχηματίζονται ἐκ παραλληλογράμμων καὶ δύο ἀπέναντι ὁποιαιδήποτε δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὡς βάσεις.

Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὸν, ὅταν ἡ γεννήτρια (§ 4, 100) ἢ αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ ἦναι κάθετοι εἰς τὴν βάσιν· ὀρθογώνιον, ὅταν ἐνῷ εἶναι ὀρθὸν, ἡ βάσις του ἦναι ὀρθογώνιον.

Κύβος εἶναι τὸ ὀρθὸν καὶ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως. Εἶναι λοιπὸν ὁ κύβος ἑξάεδρον ἔχον τὰς ἓξ ἕδρας ἴσας.

§ 103. Ὀνομάζεται Πυραμὶς τὸ σχηματιζόμενον ςερεὸν ἐκ πολλῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων, φερομένων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ (σχ. 63), καὶ περατουμένων εἰς τὸ αὐτὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ καλούμενον βάσις αὐτῆς· τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζεται Κορυφή.

Ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνικὴ [σχ. 60], τετραγωνικὴ ἢ πολυγωνικὴ [σχ. 63]. ὅταν ἡ βάσις της ἦναι τρίγωνον, τετράπλευρον, ἢ ὁποιονδήποτε πολύγωνον· τὸ τετράεδρον εἶναι πυραμὶς τριγωνική.

Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς βάσεως διάστημα, ἢ ἡ φερομένη κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ ταύτης τῆς βάσεως. Ἐὰν κόψωμεν τὴν πυραμίδα διὰ ἐπιπέδου παραλλήλου εἰς τὴν βάσιν, τὸ μένον στερεὸν ὀνομάζεται Κορμὸς τῆς πυραμίδος, ἢ πυραμὶς Κόλουρος.

Διαγώνιος ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ἡ διερχομένη εὐθεῖα διὰ τῶν κορυφῶν δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν.

§ 104. Εἴδομεν ποῖαι συνθῆκαι ἀπαιτοῦνται [§ 29] διὰ νὰ ἦναι δύο τρίγωνα ἴσα· ἐὰν ἐνταῦθα λάβωμεν ἀντὶ τῶν γραμμῶν ἐπίπεδα, συνάγωμεν ὅτι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἴσαι.

ά Ὅταν αἱ τρεῖς ἕδραι τῆς μιᾶς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς τῆς ἄλλης.

β′ Ὅταν δύο ἕδραι τῆς μιᾶς ἦναι ἴσαι μὲ δύο τῆς ἄλλης καθὼς καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἐπίπεδος γωνία.

γ′ Ὅταν αἱ ἓξ πλευραὶ ἦναι ἴσαι καὶ εἰς τὰς δύο.

§ 105. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἐντὸς τοῦ πολυέδρου - - - ΑΒΓΔΕ αβγδε σημείου Ο (σχ. 64) φέρωμεν πρὸς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν Ββ, Γγ εὐθείας, σχηματίζομεν μίαν πολύεδρον πυραμίδα ΟΒβΓγ· καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν κατασκευὴν ταύτην εἰς ἑκάστην τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς τόσας πολυέδρους πυραμίδας, ὅσας ἕδρας ἔχει. Αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν βάσεις τὰ πολύγωνα ΑαΒβ, ΒβΓγ, αβγδε, ΑΒΓΔΕ, κτλ. ἕκαστον τῶν ὁποίων [§ 42] εἴδομεν ὅτι δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα· ὅλαι λοιπὸν αἱ πολύεδροι πυραμίδες δύνανται ν' ἀναλυθοῦν εἰς πολλὰς τριγωνικὰς πυραμίδας· ὅθεν κάθε κανονικὸν πολύεδρον ἀναλύεται εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ κεῖται εἴς τι σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ πολυέδρου.

§ 106. Δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια [§ 75, 76],

ά Ὅταν αἱ ὁμόλογοι ἕδραι ἦναι ὅμοιαι.

β′ Ὅταν αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι ἦναι ἴσαι. Ἐὰν αἱ συνθῆκαι αὗται ὑπάρχουν, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κλίνουν ἰσάκις ἐπὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν, καὶ προσέτι αἱ πλευραὶ αὗται, καθὼς καὶ αἱ ὁμόλογοι διαγώνιοι εἶναι ἀνάλογοι.

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἀναλύονται εἰς ἴσον ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων ὁμοίων ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ ὁμοίως κειμένων· διότι αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ὅμοιαι, αἱ ὁμόλογοι ςερεαὶ γωνίαι ἴσαι, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κλίνουν ἰσάκις. Ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ ἕδραι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι, αἱ πλευραὶ καὶ αἱ ἕδραι τῶν πυραμίδων τούτων εἶναι ἐπίσης ἀνάλογοι.

## Περὶ τοῦ μέτρου τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῆς ςερεότητος τῶν πολυέδρων.

§ 107. Κατὰ τὰς ἐκτεθείσας ἀρχὰς, εὐκόλως προσδιορίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν ὁποιουδήποτε πολυέδρου, ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς τὴν ἐπιφάνειάν του περιεχομένων ἐπιφανικῶν μονάδων, ἐὰν προσθέσωμεν τὰς εἰς ἑκάςην ἕδραν περιεχομένας μονάδας.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἐξαιρουμένων τῶν δύο βάσεων, ὀνομάζεται Κυρτή. Ἡ ἐπιφάνεια ἑκάςου τῶν συνιςώντων τὴν κυρτὴν ταύτην ἐπιφάνειαν παραλληλογράμμων, εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος του· ὅθεν, ἐπειδὴ ὅλα τὰ συνιςῶντα τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην παραλληλόγραμμα τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν σχηματίζουν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος του.

Ἐπειδὴ ἡ πολυγωνικὴ κανονικὴ (α) πυραμὶς σύγκειται ἔκ τινος σειρᾶς τριγωνικῶν ὁμοίων ἐπιφανειῶν (σχ. 63), ἡ κυρτὴ αὐτῆς ἐπιφάνεια εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιφανειῶν ὅλων

---

(α) Ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται κανονικὴ ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς ἦναι πολύγωνον κανονικὸν, καὶ συγχρόνως ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· ἡ γραμμὴ αὐτη ὀνομάζεται τότε Ἄξων τῆς πυραμίδος.

τούτων τῶν τριγώνων· καὶ ἐπειδὴ μέτρον ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων εἶναι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ἡ ΒΓ, ἡ ΓΔ τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσαι μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑκάστου τριγώνου (§ 68), τὰ δὲ ὕψη ταῦτα εἶναι ἴσα, συνάγεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς της πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τούτων τῶν τριγώνων.

§ 107 δίς· Ἐὰν ἡ πυραμὶς τμηθῇ δὶ ἐπιπέδου παραλλήλου εἰς τὴν βάσιν, τοῦ μένοντος κορμοῦ ἑκάστη ἕδρα εἶναι τραπέζιον (§ 65)· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τραπεζίων τούτων· καὶ ἑπομένως ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος μιᾶς τῶν ἑδρῶν της πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν δύο βάσεων, ἢ μὲ τὸ ὕψος τοῦτο πολλαπλασιασθὲν μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τὸν ὁποῖον καὶ αἱ βάσεις, καὶ τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἡμίσεως ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ κορμοῦ.

§ 108. Καθὼς διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν ἐλάβαμεν ὡς μονάδα τὸ τετράγωνον, οὕτω διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν στερεῶν λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸν κύβον.

Ὀνομάζεται μέτρον κυβικὸν ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἓν μέτρον· ἐὰν λάβωμεν τοῦτο ὡς μονάδα τοῦ ὄγκου, ὁ ὄγκος ἑνὸς στερεοῦ, ἢ ἡ στερεότης αὐτοῦ εἶναι ὁ ἐκφράζων ἀριθμὸς ποσάκις τὸ κυβικὸν μέτρον περιέχεται εἰς τὸ στερεὸν τοῦτο· Κυβίζειν στερεόν τι σημαίνει ποσάκις ὁ ὡς μονὰς λαμβανόμενος κύβος, ἢ τὸ κυβικὸν μέτρον, περιέχεται εἰς τὸ στερεὸν τοῦτο. Δυνάμεθα, ἐκτὸς τοῦ μέτρου, νὰ λάβωμεν καὶ ἄλλην μονάδα, καθὼς τὸν πόδα, τὸν δάκτυλον, κτλ.

§ 108 δίς· Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα κυβικὰ μέτρα περιέχει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕ (σχ. 65.), μετρῶμεν κατὰ πρῶτον τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς βάσεως καὶ εὑρίσκομεν, ἐξ ὑποθέσεως, ὅτι ἡ μὲν ἔχει μῆκος 5 μέτρων ἡ δὲ 9· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν ὅ-

τι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ περιέχει 45 τετραγωνικὰ μέτρα. Ὑποθέτοντες ἤδη ὅτι εἰς ἕκαστον τῶν τετραγωνικῶν τούτων μέτρων θέτομεν ἓν κυβικὸν μέτρον, δυνάμεθα οὕτω νὰ θέσωμεν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ 45 ἐκ τῶν κύβων τούτων· καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΑΕ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ εἶναι 5 μέτρα, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν 5 στρώματα ἕκαστον ἐκ 45 κύβων, ἤτοι 225 κυβικὰ μέτρα θέλουν συμπεριλάβει ὅλην τοῦ παραλληλεπιπέδου τὴν στερεότητα. Ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος του.

§ 109. Εἴδομεν (§ 102) ὅτι κύβος εἶναι τὸ στερεὸν τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι. Ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ κύβου τούτου ἦναι ἴση μὲ μίαν μονάδα, ἡ στερεότης του θέλει εἶναι ἴση μὲ 1×1×1=1· ἐὰν μὲ δύο, ἴση μὲ 2×2×2=8. Ἐγγένει διὰ νὰ σχηματίσωμεν ὁποιονδήποτε κύβον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του δὶς μὲ τὸν ἑαυτόν του. Ἐκ τούτου εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὀνομάζομεν κύβον ἀριθμοῦ τινος τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου πολλαπλασιαζομένου δὶς μὲ τὸν ἑαυτόν του. Ἰδοὺ οἱ κύβοι τῶν δέκα πρώτων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ψηφία | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Κύβοι | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000. |

Εἰς τὴν γεωμετρίαν ἡ στερεότης τοῦ κύβου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν 6 μέτρα π. χ. εἶναι 216 κυβικὰ μέτρα.

§ 110. Ἡ στερεότης τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ὕψους του· διότι τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος ὕψος τὸ αὐτό, καὶ βάσιν διπλασίαν, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν βάσιν τοῦ παραλληλεπιπέδου εἰς δύο ἴσα μέρη δι᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου φερομένου διαγωνίως, καὶ νὰ σχηματίσωμεν δύο ἴσα τριγωνικὰ πρίσματα.

Ἡ στερεότης ὁποιουδήποτε πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ ὕψος του.

ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ πολυγωνικὸν πρίσμα εἰς τόσα τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικὰ πρίσματα, ὅσα τρίγωνα εἰμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως (§ 42).

§ 111. Ἔςω τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 66). Ἐὰν διὰ τῶν διαγωνίων ΖΑ, ΖΓ, καὶ διὰ τῆς πλευρᾶς ΑΓ φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον ΖΑΓ, θέλομεν χωρίσει ἀπὸ τὸ πρίσμα τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΑΖΓΒ, ἔχουσαν βάσιν τὴν τοῦ πρίσματος ΑΒΓ, καὶ ὕψος τοῦ ἰδίου ΖΒ. Τὴν μένουσαν τετραγωνικὴν πυραμίδα ΖΑΔΕΓ, δυνάμεθα νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἄλλας πυραμίδας τὰς ΖΔΓΕ, ΖΔΑΓ αἵτινες εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐπειδὴ αἱ κορυφαί των κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ζ, καὶ βάσεις ἴσας, διότι ἑκάςη εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΕΓ. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΖΔΓΕ εἶναι προσέτι ἴση μὲ τὴν πυραμίδα ΑΖΒΓ, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν (διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΖΕ) καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ=ΓΕ· ἄρα αἱ τρεῖς πυραμίδες εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ λοιπὸν πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους, ἡ ςερεότης αὐτῆς εἶναι ἴση μὲ τὸ τρίτον τῆς ςερεότητος τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ἡ ςερεότης λοιπὸν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν της πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους.

§ 112. Ἐπειδὴ πᾶσα πολυγωνικὴ πυραμὶς δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τόσας τριγωνικάς, ὅσα τρίγωνα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸ πολύγωνον τῆς βάσεώς της, ἕπεται ὅτι ἡ ςερεότης τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ςερεότητα τῆς κολούρου πυραμίδος [§ 103] προσδιορίζομεν τὴν ςερεότητα τῆς ὅλης πυραμίδος, ἔπειτα τὴν τῆς μικρᾶς ἡ ὁποία συμπληρόνει τὴν πρώτην, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ πρῶτον ἐξαγόμενον ἀπὸ τὸ δεύτερον.

§ 113. Εἴδομεν ὅτι κάθε πολύεδρον ἀναλύεται εἰς τόσας πολυγωνικὰς πυραμίδας, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ κεῖται εἰς τι σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ, ὅσας ἕδρας ἔχει [§ 105], καὶ ὅτι ἑκάςη

τῶν πυραμίδων τούτων ἀναλύεται, πάλιν εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας· ἀναλύοντες λοιπὸν οὕτω τὸ πολύεδρον εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, δυνάμεθα νὰ προσδιωρίσωμεν τὴν ςερεότητά του.

## Περὶ τῶν ὁμοίων πολυέδρων καὶ τοῦ πρίσματος.

§ 114. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιφανειῶν τῶν ἑδρῶν του [§ 107]· ἐὰν συγκρίνωμεν δύο ὅμοια πολύεδρα, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν θέλουσιν εἶναι ὡς αἱ ὁμόλογοι ἕδραι· ἀλλ' αἱ ἕδραι αὗται εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν [§ 82, 83]· ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

§ 115. Ἔςωσαν Υ καὶ υ τὰ ὕψη, Β καὶ β αἱ βάσεις τῶν δύο ὁμοίων παραλληλεπιπέδων Π καὶ π. Αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν οὖσαι ὡς αἱ βάσεις των Β καὶ β, δίδουν ἐπ.Π : Β:: ἐπ.π: β· ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν παραλληλεπιπέδων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἢ τῶν ὑψῶν Υ καὶ υ (§ 83), ἔχομεν τὴν ἄλλην ταύτην ἀναλογίαν ἐπ.Π:Υ²:: ἐπ.π:υ². εἰς τὴν θέσιν τοῦ λόγου τῶν ἐπιφανειῶν θέτοντες τὸν λόγον τῶν βάσεων, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν Β. Υ²:: β: υ², ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν Βυ²=βΥ². Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν ἕκαςον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης μὲ τὴν αὐτὴν ποσότητα Υυ, εὑρίσκομεν ΥυXΒυ²=ΥυXβΥ² ἢ ΒΥXυ³=βυXΥ³ ἢ ΒΥ: βυ:: Υ³: υ³· ἀλλὰ ΒΥ καὶ βυ ἐκφράζουν τὴν ςερεότητα τῶν δύο παραλληλεπιπέδων, ἐπειδὴ Β καὶ β εἶναι αἱ βάσεις, καὶ Υ καὶ υ τὰ ὕψη των (§ 110)· αἱ ςερεότητες λοιπὸν δύο ὁμοίων παραλληλεπιπέδων εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

§ 116. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι αἱ ςερεότητες δύο ὁμοίων τριγωνικῶν, ἢ ὁμοίων πολυγωνικῶν πυραμίδων εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν των, ἐπειδὴ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τῆς ςερεότητος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος (§ 111), καὶ ἡ

πολυγωνικὴ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας (§ 112).
Ἐπειδὴ ὡσαύτως δύο πολύεδρα ὅμοια δύνανται ν' ἀναλυθοῦν εἰς ἰσαρίθμους ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας (§ 105, 106 καὶ 113), ἕπεται ὅτι αἱ στερεότητες δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν.

§ 117. Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα, ὡς ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 67), τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ΑΒΓ, ΔΕΖ δὲν εἶναι παράλληλοι, ἀναλύεται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἐχούσας βάσιν τὴν αὐτὴν ΑΒΓ, καὶ κορυφὰς τὰς τρεῖς Ε, Ζ, Δ τῆς ἄνω βάσεως. Φέρομεν ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Ε, Γ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΓ, καὶ χωρίζομεν ἀπὸ τὸ πρίσμα τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι ἡ ΑΒΓ καὶ ἡ κορυφὴ εἰς τὸ Ε· διαιροῦμεν τὴν μένουσαν τετραγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΓΔΖ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕΓ εἰς δύο τριγωνικὰς τὰς ΕΔΑΓ, ΕΔΓΖ, καὶ χωρὶς ν' ἀλλάξωμεν τὰς βάσεις ΑΓΔ, ΓΖΔ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν κοινὴν αὐτῶν κορυφὴν Ε εἰς τὸ Β, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι παράλληλος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΖ· ἔχομεν λοιπὸν τὰς δύο πυραμίδας ΒΓΑΔ, ΒΓΖΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ τελευταία δύναται νὰ λάβῃ βάσιν τὴν ΑΓΖ, διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΓΔΖ εἶναι ἰσοδύναμα. Τὸ πρίσμα ἄρα τοῦτο σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν τετραέδρων ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ, ΖΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ τὰς κορυφάς των εἰς τὰς τρεῖς Δ, Ε, Ζ τῆς ἄνω βάσεως. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ πρίσματος ἦναι κάθετοι εἰς τὴν βάσιν ΑΒΓ, ἡ στερεότης τῶν τριῶν τούτων πυραμίδων εἶναι $\frac{1}{3}$ΑΒΓ×ΒΕ, $\frac{1}{3}$ΑΒΓ×ΑΔ, $\frac{1}{3}$ΑΒΓ×ΓΖ, ἑπομένως ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων ποσοτήτων ἢ μὲ $\frac{1}{3}$ΑΒΓ×(ΒΕ+ΑΔ+ΓΖ).

## Περὶ τοῦ Κυλίνδρου.

§ 118. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΒΔΕ [σχ. 68] ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΑΒ, καὶ κινήσωμεν αὐτὴν καθέτως ὥστε νὰ διατρέξῃ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου, λαμβάνομεν τὸ στερεὸν ΑΒΔΕΖΗ, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται Κύλινδρος·

Οἱ παράλληλοι κύκλοι ΒΔΕ, ΑΗΖ εἶναι αἱ βάσεις αὐτοῦ, τὸ μεταξὺ τῶν βάσεων διάςημα ΚΘ τὸ ὕψος του, καὶ αἱ ἴσαι μὲ τὴν γεννήτριαν εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΕΖ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

Ὁ κύλινδρος γεννᾶται ἀκόμη ἔκ τινος κύκλου προβαίνοντος παραλλήλως εἰς τὸν ἑαυτόν του, κατὰ τὸ μῆκος ἢ τῆς καθέτου εἰς τὴν βάσιν του καὶ διερχομένης ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ εὐθείας ΚΘ ἢ τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας αὐτοῦ ΑΒ. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι πᾶσα τομὴ γινομένη παραλλήλως εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, εἶναι κύκλος ἴσος μὲ τὴν βάσιν.

Ἐὰν ἡ γεννήτρια ΑΒ ἦναι κάθετος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, ὁ κύλινδρος λέγεται Ὀρθὸς, καὶ ἐὰν πλαγία [σχ. 69], Πλάγιος. Ὑπάρχουν κύλινδροι πλάγιοι ὑπὸ ὁποιασδήποτε κλίσεις καὶ κύλινδροι τῶν ὁποίων αἱ βάσεις δὲν εἶναι κύκλοι. Δύο κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι ὅταν τὰ ὕψη των ἦναι ἀνάλογα μὲ τὰς διαμέτρους τῶν βάσεών των.

§ 119 Ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρίσμα πολυγωνικὸν ἔχον ἀπείρους πλευρὰς (§ 71, 79), ἡ κυρτὴ (§ 107) ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος του. Ἔςω Υ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ Δ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως, ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἢ μὲ 2Α· εἴδομεν ὅτι (§ 88) $\pi\Delta=2\pi A$ παριςάνει τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι Α· ὅθεν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ $2\pi A \times Y$·

Ἑκάςη τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ $\pi A^2$ (§ 89), αἱ δύο δὲ ὁμοῦ μὲ $2\pi A^2$, ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι· ἐὰν προσθέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν κύκλων τούτων εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, λαμβάνομεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ἡ $2\pi A Y + 2\pi A^2 = 2\pi A [Y + A]$· ἀλλὰ $2\pi A$ παριςάνει τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, καὶ $Y + A$ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου πλέον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ καὶ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος πλέον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως.

§ 120. Ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρῖσμα πολυγωνικὸν ἔχον ἄπειρον ἀριθμὸν πλευρῶν (§ 110), συνάγεται ὅτι ἡ ςερεότης τοῦ ὀρθοῦ καὶ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ὕψος του. Ἐὰν καλέσωμεν Υ τὸ ὕψος καὶ Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως ταύτης θέλει εἶναι ἴση μὲ $\pi A^2$ (§ 89), καὶ ἡ ςερεότης τοῦ κυλίνδρου $\pi A^2 \times Y$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι αἱ ςερεότητες δύο κυλίνδρων ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων, ἢ ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν βάσεων τούτων, καὶ ὅτι αἱ ςερεότητες τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι ὡς τὰ ὕψη.

Ἐπειδὴ δύο ὅμοια πρίσματα εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των (§ 115), ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ τῶν ὀρθῶν καὶ κυκλικῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπειδὴ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ τὰ ὕψη· ἕπεται ὅτι αἱ ςερεότητες δύο ὁμοίων κυλίνδρων, εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων, ἢ τῶν ὑψῶν.

## Περὶ τοῦ Κώνου.

§ 121. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 70), διερχομένη πάντοτε διὰ τοῦ σημείου Α, καὶ κινουμένη οὕτως ὥςε τὸ ἄκρον της Β νὰ διατρέξῃ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΒΕΔ, καταγράφει τὸ ςερεὸν ΑΒΕΔ τὸ ὀνομαζόμενον Κῶνος, τοῦ ὁποίου τὸ σημεῖον Α εἶναι ἡ κορυφὴ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΔ, κτλ., αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. Ὅταν ἡ κορυφὴ Α εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἄνω τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως, ὁ κῶνος ὀνομάζεται ὀρθὸς κυκλικὸς, ἢ κῶνος κανονικός· ἡ κάθετος δὲ ΑΚ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, εἶναι τὸ Ὕψος ἢ ὁ Ἄξων τοῦ κώνου. Εἰς τὸν ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ὅταν ὁ κῶνος ἦναι πλάγιος, ἡ κορυφὴ Α (σχ. 71) δὲν εἶναι πλέον ἄνω τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τῆς βάσεως, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΔ δὲν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ ὁ ἄξων ΑΚ δὲν εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Ὑπάρχουν κῶνοι κυκλικοὶ πλάγιοι ἔχοντες διαφόρους κλίσεις, καὶ ὀρθοὶ ἢ πλάγιοι, τῶν ὁποίων ἡ βάσις δὲν εἶναι κύκλος.

§ 122 Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ὁ ὀρθὸς καὶ κυκλικὸς κῶνος γεννᾶται ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΚ περὶ τὴν κάθετον ΑΚ. Τὸ ἄκρον τῆς καθέτου ΒΚ γεννᾷ τὴν περιφέρειαν ΒΞΔ, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΑΒ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΑΒΕΔ.

Ἐπεὶ ἡ ἕκαστον σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ, ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, καὶ τὸ ἴδιον καταγράφει μίαν περιφέρειαν, ἕπεται ὅτι πᾶσα τομὴ γινομένη εἰς τὸν ὀρθὸν καὶ κυκλικὸν κῶνον παραλλήλως εἰς τὴν βάσιν του, εἶναι κύκλος.

Ἐὰν κόψωμεν τὸν κῶνον διὰ ἐπιπέδου παραλλήλου εἰς τὴν βάσιν του, τὸ μένον στερεὸν καὶ περατούμενον ἐκ δύο κύκλων, ὀνομάζεται κῶνος κόλουρος, ἢ κορμὸς κώνου.

§ 123 Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν ὀρθὸν καὶ κυκλικὸν κῶνον ὡς πυραμίδα πολυγωνικὴν ἔχουσαν ἀπείρους πλευράς. Τὸ ὕψος τῶν συνιστώντων τὴν πυραμίδα ταύτην ἀπείρως μικρῶν τριγώνων, γίνεται ἐνταῦθα ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ κώνου (§ 107.)· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους μιᾶς πλευρᾶς·

Ἐὰν καλέσωμεν Μ τὸ μῆκος τοῦτο καὶ Α τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, λαμβάνομεν τὸν τύπον πΑΜ διὰ οὗ προσδιορίζομεν τὴν κυρτὴν ταύτην ἐπιφάνειαν.

Αἱ κυρταὶ λοιπὸν ἐπιφάνειαι δύο κώνων ἐχόντων ἴσας πλευράς, εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών των, ἢ ἀνάλογοι μὲ τὰς πλευράς, ὅταν αἱ ἀκτῖνες ἦναι ἴσαι·

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος ὕψος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, εἶναι $2\pi A^2$ (§ 119.)· ἡ δὲ τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, εἶναι $\pi A^2$· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ

κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ταύτης τῆς βάσεως, ἢ μᾶλλον αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου αἱ ἔχουσαι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τῶν ὁποίων τὸ ὕψος τοῦ πρώτου, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου, ἰσοῦνται μὲ τὴν ἀκτῖνα ταύτης τῆς βάσεως, ἔχουν λόγον μεταξύ των ὡς 2 πρὸς 1.

§ 124. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἢ τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ $\pi A^2$, ἡ δὲ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια παριστάνεται διὰ $\pi AM$, ἐὰν προσθέσωμεν τὰς δύο ταύτας ἐπιφανείας, λαμβάνομεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου $\pi A^2 + \pi AM = \pi A(A+M)$· ἀλλὰ $\pi A$ εἶναι ἡ ἡμιπεριφέρεια τῆς βάσεως, καὶ $A+M$ τὸ κεφάλαιον τῆς ἀκτῖνος ταύτης τῆς βάσεως πλέον τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς· ἡ ὅλη λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ κεφάλαιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως καὶ τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς, ἢ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως καὶ τοῦ μήκους μιᾶς πλευρᾶς.

Ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος ὕψος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα $A$ τῆς βάσεως, εἶναι $4\pi A^2$ (§ 119)· ἡ δὲ τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην μὲ $A$, εἶναι $2\pi A^2$. αἱ δύο λοιπὸν αὗται ἐπιφάνειαι εἶναι μεταξύ των ὡς 2 πρὸς 1 [§ 123.]·

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς κολούρου πυραμίδος [§ 107 δίς], προσδιορίζομεν εὐκόλως τὴν τοῦ κολούρου κώνου, διότι τὸ ὕψος μιᾶς τῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος γίνεται ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τούτου· ὅθεν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς του πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων, ἢ μὲ τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς πολλαπλασιασθὲν μὲ τὴν διερχομένην περιφέρειαν διὰ τοῦ ἡμίσεως ὅλων τῶν πλευρῶν, παραλλήλως εἰς τὰς βάσεις [§ 69, 107 δίς].

§ 125 Ἐπειδὴ ὁ κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμὶς ἔχουσα ἀπείρους πλευράς, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἡ στερεότης αὐτοῦ εἶναι

ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἦναι Α, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $\pi A^2$, καὶ καλοῦντες Υ τὸ ὕψος, λαμβάνομεν τὴν ςερεότητα τοῦ κώνου $\frac{1}{6}\pi A^2 \times Y$.

Ἡ ςερεότης τοῦ ἔχοντος κυλίνδρου ὕψος Υ, εἶναι $\pi A^2 \times Y$ (§120), ἡ δὲ τοῦ ἔχοντος κώνου τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, $\frac{1}{3}\pi A^2 \times Y$· ὅθεν ἡ ςερεότης τοῦ κώνου εἶναι τὸ τρίτον τῆς τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Εὑρίσκομεν τὴν ςερεότητα τοῦ κολούρου κώνου κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον καθὼς εὕρομεν καὶ τὴν τῆς κολούρου πυραμίδος (§ 112.)· Ἐὰν ἐκ τῆς ςερεότητος τοῦ ὅλου κώνου ἀφαιρέσωμεν τὴν ςερεότητα τοῦ μικροῦ κώνου, ἔχομεν τὴν ςερεότητα τοῦ κολούρου.

§ 126. Δύο κῶνοι εἶναι ὅμοιοι, ὅταν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών των, τὰ ὕψη των καὶ αἱ πλευραί των ἦναι ἀνάλογοι [§ 74]· ἐκ τούτου συνάγομεν α΄ ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων κώνων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων, τῶν ὑψῶν, ἢ τῶν πλευρῶν· β΄ ὅτι αἱ ςερεότητες εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἰδίων τούτων γραμμῶν [§ 116, 120]·

## Περὶ τῆς Σφαίρας

§ 127. Ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΔΒ (σχ. 72) ςρεφομένη περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, καταγράφει μετὰ ὁλόκληρον περιςροφὴν μίαν ἐπιφάνειαν ςρογγύλην τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν Σφαῖραν.

Ἐπειδὴ ἕκαςον τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΔΒ ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου Κ, ἕπεται ὅτι ἐνῷ ἡ περιφέρεια αὕτη ςρέφεται κανονικῶς περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς φυλάττουν τὸ αὐτὸ διάςημα πρὸς τὸ κέντρον τοῦτο· τὸ σημεῖον λοιπὸν Κ, τὸ ὀνομαζόμενον Κέντρον τῆς σφαίρας, ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Αἱ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας φερόμεναι

εὐθεῖαι, ὀνομάζονται Ἀκτῖνες τῆς σφαίρας, αἱ ὁποῖαι ἀποδεικνύονται εὐκόλως ὅτι εἶναι ἴσαι (§ 45).

§ 128. Ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας εὐθεῖα, ὀνομάζεται Διάμετρος, καὶ εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος. Πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, καὶ τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο σημεῖα, εἶναι χορδή. Ἐκ τῶν εἰρημένων γίνεται δῆλον ὅτι ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι [§ 46].

Τὸ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενον ἐπίπεδον ΑΠΙΖΒΗ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς κατὰ μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη δὲν εἶναι παρὰ μία ἀπὸ τὰς θέσεις τὴν ὁποίαν ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΔΒ ἔλαβε στρεφομένη περὶ τὴν ΑΒ. Πᾶς διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενος κύκλος ὀνομάζεται Μέγιστος.

Δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται πάντοτε εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐπειδὴ ἡ κοινή των τομὴ ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, εἶναι διάμετρος. Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη [§ 46].

§ 129. Ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, δίδει δὲ ἄλλην τινὰ τομὴν τὴν ΘΙΣΑ, ἡ τομὴ αὕτη εἶναι ἐπίσης κύκλος, διότι γεννᾶται ἐκ τῆς χορδῆς ΘΑ, ἡ ὁποία στρεφομένη κυκλικῶς μένει πάντοτε κάθετος εἰς τὴν διάμετρον ΑΒ, καὶ τῆς ὁποίας τὸ μῆκος δὲν μεταβάλλεται. Ὁ κύκλος οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ καταγραφομένου διὰ τῆς ἀκτῖνος ΔΚ. Οἱ μὴ διερχόμενοι διὰ τοῦ κέντρου οὗτοι κύκλοι ΘΙΣΑ, ΜΠΝΟ, ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ καταγράψωμεν ἀπείρους τέμνοντες τὴν σφαῖραν καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον, ὀνομάζονται κύκλοι Μικροί. Τὰ κέντρα Λ καὶ Ο τῶν μικρῶν κύκλων, καὶ τὸ κέντρον Κ τῆς σφαίρας, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΚ καθέτου ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν μικρῶν κύκλων.

Πᾶν ἡμίχορδον ΘΛ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος ΔΚ, καὶ γίνεται τόσον μικρότερον, ὅσον ἀπομακρύνεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς

σφαίρας. Οἱ μικροὶ κύκλοι γίνονται τόσον μικρότεροι ὅσον περισσότερον ἀπομακρύνονται ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

§ 130. Ἔςω νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν ΑΒ (σχ. 73) καὶ γεννωμένης ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΔΕΖΒ. Φέρομεν τὰ ἡμίχορδα ΔΗ, ΕΘ, ΖΙ κάθετα ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ· ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ, ὅπου αἱ χορδαὶ αὗται τέμνουν τὴν περιφέρειαν, ὑψόνομεν τὰς καθέτους ΔΣ, ΕΛ, καὶ ἐκ τοῦ μέσου τῶν καθέτων τούτων φέρομεν τὰς χορδὰς ΜΟ, ΝΠ, καὶ ἑνόνομεν τέλος τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, ὅπου αἱ νέαι αὗται χορδαὶ τέμνουν τὴν περιφέρειαν, μὲ τὸ κέντρον Κ διὰ τῶν ἀκτίνων ΜΚ, ΝΚ. Τούτων τεθέντων, ἐὰν ςρέψωμεν τὰ τόξα ΔΕ, ΕΖ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, εἶναι φανερὸν ὅτι θέλουν καταγράψει κολούρους κώνους ἢ κορμοὺς, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι τὰ ἴδια ταῦτα τόξα, τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι μικρότατα, καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ τὰ λάβωμεν, χωρὶς ἐπαισθητὸν σφάλμα, ὡς εὐθείας γραμμάς. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ καταγραφομένου κορμοῦ ἐκ τοῦ τόξου ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΔΕ πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΜΟ (§ 124.). Ἐὰν καλέσωμεν ΜΟ$=$α, ἔχομεν τὴν κυρτὴν ταύτην ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ $2\pi\alpha\times$ΔΕ.

Ἐπειδὴ ἤδη ὑποθέσαμεν τὸ τόξον ΔΕ τόσον μικρὸν, ὥςε δυνάμεθα νὰ τὸ λάβωμεν, χωρὶς ἐπαισθητὸν σφάλμα, ὡς εὐθεῖαν γραμμὴν, τὸ τρίγωνον ΔΕΣ θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΚΟΜ, ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοί των πλευραὶ εἶναι κάθετοι (§ 76). Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ πλευραὶ αὗται εἶναι ἀνάλογοι, καλοῦντες Α τὴν ἀκτῖνα ΚΜ τοῦ κύκλου, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΔΕ: ΚΜ ἢ Α:: ΔΣ: ΜΟ ἢ α, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν (§ 63) ΔΕ$=\dfrac{A\times\Delta\Sigma}{\alpha}$. ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἔκφρασιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κορμοῦ $2\pi\alpha\times$ΔΕ, καὶ ἐξαλείφοντες τὴν ἀκτῖνα α ὡς κοινὴν εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαςὴν, λαμβάνομεν $2\pi\times A\times\Delta\Sigma$, ἢ $2\pi A\times\Delta\Sigma$.

Ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ ἄλλου τόξου ΕΖ λαμβάνομεν ἐπί-

σης καὶ δεύτερον κορμὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον $2\pi A \times EA$, καὶ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ειμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον ὅλων τῶν κορμῶν εἰς τοὺς ὁποίους δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια ὅλων τούτων τῶν κορμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἔχομεν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ἴσην μὲ $2\pi A\,[\Delta\Sigma + EA +$, κτλ.]· ἀλλ' αἱ γραμμαὶ ΔΣ,ΕΛ ἰσοῦνται μὲ τὰ μέρη ΗΘ,ΘΙ τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἐὰν ἀθροίσωμεν ὅλους τοὺς κορμοὺς τοῦ ἡμισφαιρίου, τὸ κεφάλαιον τῶν γραμμῶν ΔΣ,ΕΛ θέλει καταντήσει ἴσον μὲ τὴν ακτῖνα ΑΚ ἢ μὲ Α· καὶ μὲ τὴν διάμετρον $AB = 2A$, ἐὰν ὅλους τοὺς τῆς σφαίρας· ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ $2\pi A \times 2A = 4\pi A^2$, ἢ μὲ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸν σαθερὸν ἀριθμὸν π.

§ 131 Ἡ ποσότης $\pi A^2$ παριςάνει τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς μεγίςου κύκλου τῆς σφαίρας, ἡ δὲ $4\pi A^2$ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγίςου της κύκλου.

Ἐπειδὴ $2\pi A$ παριςάνει τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μεγίςου κύκλου τῆς σφαίρας, ἕπεται ἀκόμη ἐκ τοῦ τύπου $2\pi A \times 2A$, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μεγίςου κύκλου πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἢ μὲ τὴν διάμετρόν του.

§ 132. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἰσοῦται μὲ τὴν τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ὕψος του μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἢ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, εἶναι ἴση μὲ $4\pi A^2$ (§ 119). Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τούτου. Εἰς ταύτην τὴν περίςασιν ὁ κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν, ἐπειδὴ ὁλόκληρος ἡ σφαῖρα περιλαμβάνεται εἰς τὸν κύλινδρον τοῦτον [σχ. 73 δίς].

Ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ τοιούτου κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τεσσάρων μεγίςων κύκλων (§131)· ἐὰν εἰς αὐτοὺς προσθέσωμεν τοὺς μεγίςους κύκλους τῶν δύο βάσεων, ἡ

ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου θέλει εἶναι ἴση μὲ ἕξ μεγίστους κύκλους· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια της σφαίρας ἰσοδυναμεῖ μὲ τέσσαρας μεγίςους κύκλους, ἄρα ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, ὡς 4 πρὸς 6 ἢ ὡς 2 πρὸς 3.

§ 133. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι Α, τὸ δὲ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον της ἀκτῖνος, εἶναι ἀκόμη $4\pi A^2$. Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι προσέτι ἴση μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τοιούτου κώνου. Ὅλαι αἱ σφαῖραι εἶναι σχήματα ὅμοια· ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα ἴσην μὲ α εἶναι $4\pi a^2$· ἐὰν συγκρίνωμεν ταύτην μὲ τὴν πρώτην, συνάγομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

§ 134. Τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τεμνόντων τὴν σφαῖραν κατὰ τὰς χορδὰς ΔΠ,ΕΘ (σχ. 73), περιλαμβανόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὀνομάζεται Ζώνη· τὰ ἐκ τῶν χορδῶν ΔΗ καὶ ΕΘ διερχόμενα ἐπίπεδα εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης ταύτης, ἡ ὁποία εἰς ταύτην τὴν περίςασιν λέγεται ζώνη ἐκ δύο βάσεων· ΗΘ εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ὅταν τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ δὲ ἄλλο τέμνη αὐτὴν κατὰ τὴν χορδὴν ΕΘ, ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν, καὶ ΑΘ εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς.

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐκ δύο βάσεων ζώνη γεννᾶται ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ τόξου ΔΕ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ἡ δὲ ἐκ μιᾶς ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ ΑΕ.

§ 135. Ἐκ τῶν ὅσων εἴπαμεν (§ 130) εὑρίσκομεν εὐκόλως κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης. Ἡ ἐκ τοῦ τόξου ΔΕ καταγραφομένη ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου, εἶναι ἴση μὲ $2\pi A \times \Delta\Sigma$ ἢ $\pi A \times H\Theta$, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τούτου εἶναι ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν τῆς ζώνης.

Ὡσαύτως διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς καταγραφομένης ζώνης διὰ τοῦ τόξου ΑΕ, ἀναλύομεν διὰ τῶν ἰδίων ἀρχῶν τὴν

ζώνην ταύτην εἰς πολλοὺς κορμοὺς, τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κεφαλαίου θέλει εἶναι $2\pi A \times A\Theta$. Ἐπειδὴ δὲ $2\pi A$ εἶναι ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, καὶ ΗΘ, ΑΘ τὰ ὕψη τῶν δύο ζωνῶν, ἡ ἐπιφάνεια ὁποιασδήποτε σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς ζώνης ταύτης πολλαπλασιασθὲν μὲ τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μεγίστου κύκλου.

Εἶναι σαφὲς ὅτι δύο ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των· ὅτι δύο ζῶναι διαφορετικῶν σφαιρῶν, ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν τούτων· ὅτι τέλος ἡ ζώνη εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὡς τὸ ὕψος τῆς ζώνης πρὸς τὴν διάμετρον.

§ 136. Τὸ μεταξὺ τῶν ἡμιπεριφερειῶν ΑΒΔ, ΑΕΔ (σχ. 74) δύο μεγίστων κύκλων τεμνομένων εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς αὐτῆς διαμέτρου, περιλαμβανόμενον μέρος ΑΒΔΕΑ τῆς σφαίρας, ὀνομάζεται Ἄτρακτος σφαιρικός. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀτράκτου, φέρομεν καθέτως ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἕνα μέγιστον κύκλον ΒΕΖ. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀτράκτου τούτου περιέχεται τοσάκις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὁσάκις τὸ τόξον ΒΕ, τὸ ὁποῖον μετρᾷ τὴν δίεδρον γωνίαν ΒΚΕ, εἰς τὴν περιφέρειαν ΒΕΖ. Ἔστω Τ ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου ΒΕ. Ἐπειδὴ εἰξεύρομεν (§ 58) ὅτι ἡ περιφέρεια περιέχει 360 μοίρας, ἔχομεν καλοῦντες Ε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀτράκτου καὶ Σ τὴν τῆς σφαίρας, τὴν ἀναλογίαν $E : \Sigma :: T : 360^0$, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $E = \frac{\Sigma \times T}{360}$. ἀλλὰ $\Sigma = 4\pi A^2$, ἄρα $E = \frac{4\pi A^2 T}{360}$. ἐὰν $T = 90^0$ ἤτοι μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἢ μὲ $180^0$ δηλ. μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἢ μὲ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, ἔχομεν $E = \pi A^2 = 2\pi A^2 = 4\pi A^2$ τὸ ὁποῖον εἶναι σαφές.

§ 137. Εἴδομεν ὅτι ἡ στερεότης τοῦ ὀρθοῦ καὶ κυκλικοῦ κώνου εἶναι τὸ τρίτον τῆς στερεότητος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (§ 125). Τοῦτο ἐφαρμόζεται καὶ εἰς ὅλους τοὺς κώνους τοὺς γεννωμένους ἔκ τινος ὁποιουδήποτε τριγώνου ΔΕΓ (σχ. 75) (§ 122). Τῳόντι ἐὰν φέρωμεν τὴ

κάθετον ΖΕ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ςρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ, θέλει γεννήσει τὸν κύλινδρον τοῦ ὁποίου ἡ ςερεότης εἶναι $\pi A^2 \times A\Gamma$, ἐπειδὴ ἐλάβαμεν ὡς ἀκτῖνα τὴν ΓΔ=Α. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΖ γεννᾷ ἐκ τῆς περιςροφῆς του ἕνα κῶνον, ὅςις θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΖΕ γεννωμένου κυλινδρικοῦ μέρους, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ςερεότης θέλει εἶναι $\frac{1}{3}\pi A^2 \times AZ$. Ὡσαύτως ὁ ἐκ τοῦ τριγώνου ΖΕΓ γεννώμενος κῶνος θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΖΓΔΕ σχηματιζομένου κυλίνδρου ἢ $\frac{1}{3}\pi A^2 \times Z\Gamma$· ἡ ςερεότης λοιπὸν τῶν σχηματιζομένων δύο κώνων ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ, εἶναι $\frac{1}{3}\pi A^2 (AZ+Z\Gamma)$ ἢ $\frac{1}{3}\pi A^2 \times A\Gamma$, ἢ τέλος τὸ τρίτον τοῦ ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΒΔ σχηματιζομένου κυλίνδρου.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΕΗ ἦναι ἀμβλυγώνιον, ἡ κάθετος πίπτει τότε ὑπὸ τὸ σημεῖον Η, καὶ τὸ ἐκ τοῦ ΑΕΗ σχηματιζόμενον ςερεὸν, θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν σχηματιζομένων κώνων ἐκ τῶν ΑΕΖ, ΗΕΖ· ἀλλὰ συγχρόνως ὁ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΘΗ καταγραφόμενος κύλινδρος εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν καταγραφομένων κυλίνδρων ἐκ τῶν ΑΒΕΖ καὶ ΗΘΕΖ· ὅθεν καὶ ἐνταῦθα τὸ ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ τριγώνου σχηματιζόμενον ςερεὸν, εἶναι τὸ τρίτον τοῦ καταγραφομένου κυλίνδρου ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

§ 138. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓΔ (σχ. 76) τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΒΓΔ κτλ. ἐκ τῶν σημείων Β,Γ,Δ, φέρομεν τὰς χορδὰς ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, καθέτους εἰς τὴν διάμετρον, καὶ ἑνόνομεν τὰ ἴδια ταῦτα σημεῖα μὲ τὸ κέντρον Ο. Ζητεῖται ἤδη νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τοῦ σχηματιζομένου ςερεοῦ ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΟΓ, ςρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΑΝ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΔΓ τοῦ τριγώνου ΔΓΙ ἕως ὅτου νὰ συναπαντήσῃ εἰς τὸ Μ τὴν ἐπίσης ἐκβαλλομένην διάμετρον ΑΝ, τὸ τρίγωνον ΜΔΟ ςρεφόμενον περὶ τὴν ΜΟ, θέλει γεννήσει ἕνα κῶνον ἔχοντα μέτρον $\frac{1}{3}\pi \Delta\Theta^2 \times MO$ [§ 137]· ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΜΓΟ γεννᾷ τὸ ςερεὸν τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι $\frac{1}{3}\pi \Gamma H^2 \times MO$· τέλος

τὸ ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΟΓ σχηματιζόμενον στερεὸν, ἐπειδὴ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τούτων κώνων, ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\pi$ ΜΟ $[\Delta\Theta^2 - \Gamma H^2]$.

§ 139. Ἐὰν εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ πολυγώνου φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΕ κάθετον, ἔπειτα τὴν ΕΛ παράλληλον εἰς τὴν ΔΘ, ἔχομεν $\Delta\Theta + \Gamma H = 2E\Lambda$ (§ 69) καὶ $\Delta\Theta - \Gamma H = \Delta I$· πολλαπλασιάζοντες μέλος πρὸς μέλος τὰς δύο ταύτας ἰσότητας, καὶ ἐξαλείφοντες τὴν ποσότητα $\Delta\Theta \times \Gamma H$, λαμβάνομεν $\Delta\Theta^2 - \Gamma H^2 = 2E\Lambda \times \Delta I$. Ἐὰν ἀντεισάξωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸ μέτρον τοῦ ἀνωτέρω εὑρεθέντος στερεοῦ, λαμβάνομεν $\frac{2}{3}\pi$ΜΟ$\times$ΕΛ$\times$ΔΙ.

Τὰ τρίγωνα ΔΓΙ, ΟΛΕ τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς καθέτους, εἶναι ὅμοια, καὶ ἑπομένως (§ 76) δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΔΙ: ΓΙ:: ΟΛ: ΕΛ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν (§ 63) $\Delta I = \frac{\Gamma I \times O\Lambda}{\Lambda E}$· ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ στερεοῦ, καὶ ἐξαλείφοντες τὴν ΕΛ κοινὴν εἰς τοὺς δύο ὅρους, εὑρίσκομεν $\frac{2}{3}\pi$ΜΟ$\times$ΓΙ$\times$ΟΛ.

Ἐκ τῶν τριγώνων ΔΓΙ, ΟΛΕ συνάγομεν ἀκόμη τὴν ἀναλογίαν ΔΓ: ΔΙ:: ΟΕ: ΟΛ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΔΓΙ, ΜΟΕ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Ι καὶ Ε εἶναι ὀρθαὶ, καὶ ἡ γωνία ΔΓΙ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν Μ τοῦ ἄλλου, διότι αἱ ΔΓ καὶ ΜΕ εἶναι παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ΓΙ καὶ ΜΟ, ὡς κάθετοι εἰς τὴν χορδὴν ΔΘ· ὅθεν καὶ ἡ τρίτη ΓΔΙ τοῦ ἑνὸς ἴση μὲ τὴν τρίτην ΜΟΕ τοῦ ἄλλου (§ 77)· αἱ ὁμόλογοί των λοιπὸν πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΔΓ: ΔΙ:: ΜΟ: ΟΕ.

Ἐπειδὴ οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς ἀναλογίας ταύτης εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς δύο τῆς προηγουμένης, οἱ ἄλλοι σχηματίζουν τὴν ἀναλογίαν ΜΟ: ΟΕ:: ΟΕ: ΟΛ ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $MO = \frac{OE^2}{O\Lambda}$· ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸ μέτρον τοῦ στερεοῦ, λαμβάνομεν $\frac{2}{3}\pi OE^2 \times \Gamma I$· ἀλλὰ $\Gamma I = H\Theta$, ὅθεν τὸ στερεὸν τοῦτο γίνεται ἴσον μὲ $\frac{2}{3}\pi OE^2 \times H\Theta$.

§ 140. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἔχομεν μίαν σειρὰν τριγώ-

νων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, κτλ. (σχ. 77), τὰ ὁποῖα, ςρεφόμενα ὡς καὶ τὸ προηγούμενον περὶ τὴν ΑΡ, σχηματίζουν ὅλα ὁμοῦ ἓν πολυγωνικὸν ςερεὸν, τὸ ὁποῖον τόσον μᾶλλον προσεγγίζει εἰς τὴν σφαῖραν, ὅσον αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ σμικρύνονται (§ 71, 79). Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Ο τῆς διαμέτρου φέρωμεν τὰς γραμμὰς ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ, ΟΙ, ΟΚ καθέτους εἰς τὸ μέσον τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ τρίγωνον ΛΟΒ, κατὰ τὸν προηγούμενον παράγραφον, γεννᾷ τὸ ςερεὸν τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον θέλει εἶναι $\frac{2}{3}\pi ZO^2 \times AA$· ὡσαύτως τὰ τρίγωνα ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, σχηματίζουν τὰ ςερεὰ τῶν ὁποίων τὸ μέτρον εἶναι $\frac{2}{3}\pi OH^2 \times AM$, $\frac{2}{3}\pi \Theta O^2 \times MN$, $\frac{2}{3}\pi OI^2 \times N\Pi$.

Ἐὰν ἤδη προσθέσωμεν ὅλα τὰ οὕτω καταγραφόμενα ςερεὰ ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓΡ τριγώνων, θέλομεν ἔχει τὸ πολυγωνικὸν ςερεὸν, τὸ ὁποῖον προσεγγίζει πολὺ εἰς τὴν σφαῖραν· πρὶν ὅμως προσθέσωμεν αὐτὰ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ κάθετοι ΟΙ, ΟΗ, ΘΟ εἶναι ὅλαι ἴσαι, καὶ ὅτι ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τούτου, τόσον αἱ κάθετοι αὗται πλησιάζουν ἐπὶ μᾶλλον νὰ γένουν ἴσαι μὲ τὴν ἀκτῖνα Α, ὥςε καταντοῦν νὰ ἐξισωθοῦν μὲ αὐτήν· ἐπομένως τὸ κεφάλαιον ὅλων τούτων τῶν ςερεῶν θέλει γένει ἴσον μὲ - - - $\frac{2}{3}\pi A^2 [AA + MA + MN, \text{κτλ.}]$.

Ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον τῶν γραμμῶν ΑΛ, ΛΜ, ΜΝ, γίνεται, καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ πολυγώνου, ἴσον μὲ τὴν διάμετρον ΑΡ ἢ μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος Α· τὸ κεφάλαιον λοιπὸν ὅλων τῶν ςερεῶν ὁλοκλήρου τοῦ πολυγώνου ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi A^2 \times 2A = \frac{4}{3}\pi A^3$, τὸ ὁποῖον παριςάνει τὸ μέτρον τοῦ καταγραφομένου ςερεοῦ ἐκ τῆς περιςροφῆς τοῦ ἀπείρους πλευρὰς ἔχοντος πολυγώνου, ἢ τὴν ςερεότητα τῆς σφαίρας. Ἡ ςερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὸν κύβον τῆς ἀκτῖνος τῆς πολλαπλασιασθέντα μὲ τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ςαθεροῦ ἀριθμοῦ π. Ἐὰν καλέσωμεν Δ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, ἔχομεν $A = \frac{1}{2}\Delta$, καὶ ὑψόνοντες εἰς τὸν κύβον λαμβάνομεν $A^3 = \frac{1}{8}\Delta^3$· ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον $\frac{4}{3}\pi A^3$, εὑρίσκομεν $\frac{4}{24}\pi\Delta^3 = \frac{1}{6}\pi\Delta^3$. Ὅθεν ἡ ςερε-

ρεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὸν κύβον τῆς διαμέτρου της πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ π.

§ 141. Ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν τύπον $\frac{4}{3}\pi A^3$ εἰς $4\pi A^2 \times \frac{1}{3}A$, συνάγομεν ὅτι ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειάν της πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος, ἐπειδὴ $4\pi A^2$ παριςάνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα A (§ 130)

Ὁ κύλινδρος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν τῆς σφαίρας ἢ μὲ A, καὶ τὸ ὕψος ἴσον μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος, ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\pi A^3$ (§ 121)· ἡ ςερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ςερεότητος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, καὶ ὕψος τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος ταύτης· ἢ ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτῖνος ταύτης.

§ 142. Ὁ κῶνος τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος A τῆς σφαίρας, ἔχει μέτρον $\frac{4}{3}\pi A^3$· ἡ ςερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, καὶ ὕψος τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ταύτης.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν ςερεότητα $\frac{4}{3}\pi a^3$ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα α, μὲ τὴν προηγουμένην σφαῖραν, συνάγομεν ἀμέσως ὅτι αἱ ςερεότητες δύο σφαιρῶν εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν διαμέτρων των.

§ 143. Ὁ κυκλικὸς τομεὺς (§ 47) ΞΟΡ (σχ. 77), ςρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΡ, καταγράφει τὸ ςερεὸν τὸ ὀνομαζόμενον τομεὺς Σφαιρικός. Εἴδομεν ὅτι τὸ οὕτω καταγραφόμενον ςερεὸν ἔχει μέτρον (§139) $\frac{2}{3}\pi A^2 \times Y$, ὅταν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον σχηματίζεται ἐξ ἀπείρων πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου, καὶ καλέσωμεν τὸ ὕψος τοῦ τομέως τούτου ΣΤ=Υ, καὶ ὅτι αἱ κάθετοι ΟΡ, ΟΦ, ΟΞ γίνονται ἴσαι μὲ τὴν ἀκτῖνα A ὅταν τὸ πολύγωνον συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν· ἀναλύοντες τὴν ποσότητα ταύτην εἰς $2\pi A \times Y \times \frac{1}{3}A$, συνάγομεν ὅτι ἡ ςερεότης τοῦ σφαιρικοῦ το-

μέως εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης, ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ, πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος, ἐπειδὴ ἡ ποσότης $2\pi A \times \Upsilon$ παριστάνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς διὰ τοῦ τόξου ΞΡ (§ 135) καταγραφομένης ζώνης·

Ἐὰν τὸ ὕψος Υ γένῃ ἴσον μὲ 2Α, ἀνευρίσκομεν πάλιν τὴν στερεότητα τῆς σφαίρας $\frac{4}{3}\pi A^3$.

§ 144. Τμῆμα σφαιρικὸν μὲ μίαν βάσιν εἶναι τὸ σχηματιζόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τμήματος ΑΒΓΗ (σχ. 76) περὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΟ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καταγράφεται διὰ τῆς γραμμῆς ΓΗ· Δίδομεν ἐνταῦθα τὸ μέτρον αὐτοῦ χωρὶς νὰ τ' ἀποδείξωμεν, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ στερεότης τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν, εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος Υ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως Β, πλέον τῆς στερεότητος μιᾶς σφαίρας ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦτο, ἢ μὲ $\frac{1}{2}\Upsilon B + \frac{1}{6}\pi\Upsilon^3$ (§ 140).

Ὡσαύτως ἡ στερεότης τοῦ ἐκ δύο βάσεων σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος του Υ πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων Β καὶ б πλέον τῆς στερεότητος τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦτο, $\frac{1}{2}(B+б)\times\Upsilon+\frac{1}{6}\pi\Upsilon^3$.

§ 145. Εἴδομεν τί καλεῖται ἄτρακτος σφαιρικός (§ 136)· Τὸ περιλαμβανόμενον στερεὸν μέρος τῆς σφαίρας μεταξὺ τῶν σχηματιζόντων τὴν ἄτρακτον ἐπιπέδων ΑΒΔ, ΑΕΔ [σχ. 74] ὀνομάζεται Ὄνυξ σφαιρικός. Ἐπειδὴ ἡ στερεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειάν της πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος (§ 141), ἕπεται ὅτι ἡ τοῦ ὄνυχος θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἀτράκτου πολλαπλασιασθεῖσαν μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος· ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ - - - $\frac{4\pi A^2 T}{360^0}$, ὅπου Τ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου ΒΕ· ἄρα

ἡ στερεότης τοῦ ὄνυχος θέλει εἶναι $\frac{4\pi A^2 T}{360^0}\times\frac{1}{3}A =$ - - - -

$\frac{4}{3}\pi A^3 \times \frac{T}{360^0}$,

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Πρόβλημα εἶναι ζήτημα τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν. Διὰ τῶν δεδομένων ἢ γνωστῶν τοῦ προβλήματος, προσδιορίζομεν τὰ ἄγνωστα διὰ ἄτινος συλλογισμοῦ ἢ κατασκευῆς. Τὸ πρόβλημα λέγεται ἀπροσδιόριστον ὅταν ἐπιδέχεται διαφόρους λύσεις.

1. Νὰ εὕρωμεν σημεῖόν τι ἀπέχον ἐξ ἄλλου κατά τι δεδομένον διάστημα. Ἔστω Α (σχ. 78) τὸ δεδομένον σημεῖον καὶ ΑΒ τὸ δεδομένον διάστημα· λαμβάνοντες κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ, καταγράφομεν τὴν περιφέρειαν ΒΓΔΕ, ἕκαστον σημεῖον τῆς ὁποίας λύει τὸ προτεθὲν ζήτημα, ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τοῦ Α (§ 45).

2 Νὰ διαιρέσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 79) εἰς δύο ἴσα μέρη. Λαμβάνοντες κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς ΑΒ, καταγράφομεν τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ· καὶ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν, καταγράφομεν καὶ τὰ ΗΘ, ΙΚ. Ἡ φερομένη γραμμὴ ΟΠ διὰ τῶν σημείων ὅπου τὰ τόξα ταῦτα τέμνονται ἀνὰ δύο, διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ξ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Τῷόντι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Π ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, ἀνήκουν εἰς τὴν ὑψουμένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (§ 10, 11)· καὶ ἐπειδὴ προσέτι ἐκ δύο δεδομένων σημείων μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (§ 6), συνάγομεν ὅτι ἡ ΟΞ εἶναι ἡ ἰδία κάθετος, καὶ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΞ καὶ ΒΞ. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κάθε ἥμισυ ΑΞ καὶ ΒΞ εἰς δύο ἴσα μέρη· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὑποδιαιροῦμεν τὴν εὐθεῖαν εἰς τέσσαρα, ὀκτώ, δεκαέξ, κτλ. ἴσα μέρη.

3. Νὰ σύρωμεν ἐξ ἑνὸς σημείου μίαν κάθετον ἐπί τινος δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Ξ (σχ. 79) ἦναι ἐπὶ τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΒ, λαμβάνομεν δύο ἄλλα σημεῖα Α καὶ Β ἰσάκις ἀπέχοντα ἐκ τοῦ Ξ, ἔπειτα τὰ σημεῖα ταῦτα ὡς κέν-

τρα, καὶ καταγράφομεν τόξα κύκλων ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα· ἡ ΟΞ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος·

Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Θ εὑρίσκεται ἔξω τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΒ· λαμβάνομεν τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κέντρον, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην γράφομεν τὸ τόξον ΑΒ τὸ τέμνον τὴν δεδομένην γραμμὴν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β· Λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὡς κέντρα, καταγράφομεν τὰ τόξα ΕΖ, ΙΚ, καὶ διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Π φέρομεν τὴν ΟΠ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀποδεικνυομένην ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

4. Νὰ εὕρωμεν σημεῖόν τι ἀπέχον ἔκ τινος δεδομένης εὐθείας κατὰ δεδομένον διάστημα. Ἔστω ΑΒ [σχ. 80] ἡ δεδομένη γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐκλέγομεν δύο σημεῖα τὰ Α καὶ Β, εἰς τὰ ὁποῖα ὑψόνομεν τὰς καθέτους ΒΓ, ΑΔ [πρόβ. 3]· ἐὰν ἐπὶ τῶν δύο τούτων γραμμῶν λάβωμεν τὰ διαστήματα ΒΕ, ΑΖ ἴσα μὲ τὸ δεδομένον διάστημα, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΖΕ θέλει εἶναι παράλληλος εἰς τὴν ΑΒ (§ 25), καὶ ὅλα της τὰ σημεῖα θέλουν ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῆς ΑΒ (§ 24).

5. Νὰ φέρωμεν ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου μίαν παράλληλον εἰς δεδομένην τινὰ εὐθεῖαν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκόλως διὰ τοῦ § 25, καὶ τοῦ τετάρτου προβλήματος.

6. Νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ ἄλλην δεδομένην. Ἔστω ΒΑΓ (σχ. 81) ἡ δεδομένη γωνία. Λαμβάνομεν κέντρον τὸ Α, καὶ ἀκτῖνα ὁποιανδήποτε, καταγράφομεν τὸ τόξον ΒΓ καὶ φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΒ· λαμβάνομεν ἤδη κέντρον τὸ σημεῖον Δ τῆς γραμμῆς ΔΕ, καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα καταγράφομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΕΖ, ἔπειτα τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΒΓ· καταγράφομεν ἓν τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρῶτον εἰς τὸ Ζ, καὶ φέρομεν τέλος τὴν ΔΖ. Ἡ γωνία ΖΔΕ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη. Τῳόντι εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ αἱ χορδαὶ ΒΓ, ΖΕ εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ τὰ τόξα αὐτῶν εἶναι ἴσα, καὶ ἡ ἀκτὶς ΑΒ=ΔΕ· ἄρα ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΑΓ (§ 29, 56).

7. Νὰ διαιρέσωμεν μίαν γωνίαν ἢ ἓν τόξον εἰς δύο ἴσα μέ-

ρη. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν, λαμβάνομεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς Α ὡς κέντρον (σχ. 82)· καταγράφομεν ὁποιονδήποτε τόξον, καὶ φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ. Ἡ φερομένη κάθετος ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς, διαιρεῖ τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσα μέρη - - - (§ 50), ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΑΟ, ΓΑΟ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας.

Διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης διαιρεῖται συγχρόνως καὶ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 50).

Ἐὰν ἡ γωνία ΒΚΔ (σχ, 38) ἦτον κεντρική, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλην γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἀρκετὸν ἦτον νὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον Κ ὡς κέντρον, καὶ νὰ γράψωμεν μίαν περιφέρειαν. Πᾶσα γωνία ΒΑΔ ἐγγεγραμμένη, θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς Κ, ἐπειδὴ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔ (§ 59).

8. Δοθεισῶν τῶν δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην. Αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι σχηματίζουν πάντοτε δύο γωνίας ὀρθάς (§ 36)· ὡσαύτως τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἐκ πολλῶν πλαγίων τεμνουσῶν εὐθεῖάν τινα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἶναι ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς (§ 17)· ἄρα ἐὰν σύρωμεν τὴν γραμμὴν ΓΔ (σχ. 5), καὶ κατασκευάσωμεν δύο γωνίας ΑΒΓ, ΑΒΕ ἴσας μὲ τὰς δύο δεδομένας, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΕΒΔ θέλει εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου.

9. Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. Σύρομεν κατὰ πρῶτον τὴν γραμμὴν ΑΒ (σχ. 83) ἴσην μὲ μίαν τῶν δεδομένων πλευρῶν· λαμβάνοντες ἔπειτα κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δευτέραν πλευρὰν ΑΓ, γράφομεν ἓν μικρὸν τόξον· μετὰ ταῦτα κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν τρίτην πλευράν, γράφομεν καὶ δεύτερον τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρῶτον εἰς τὸ σημεῖον Γ· ΒΑΓ εἶναι λοιπὸν τοῦ ζητούμενον τρίγωνον.

10. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν καὶ τῆς περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον (§ 29). Εἰς τὸ ἄκρον Α - - (σχ. 83) τῆς γραμμῆς ΑΒ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δεδομένην· καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰ μήκη ΑΒ, ΑΓ τῶν

πλευρῶν, φέρομεν ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῶν τὴν γραμμὴν ΒΓ, καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον.

11. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν καὶ τῆς προσκειμένης πλευρᾶς, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. Σύρομεν τὴν ΑΒ [σχ. 23] ἴσην μὲ τὴν δεδομένην πλευράν. Εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ τῆς γραμμῆς ταύτης κατασκευάζομεν τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΑΒΓ ἴσας μὲ τὰς δεδομένας· αἱ δύο γραμμαὶ ΑΓ, ΒΓ τεμνόμεναι εἰς τὸ Γ σχηματίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

12. Νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου. Πρὸς τοῦτο δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν ἑκάστης τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· διότι ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 22) προεκτείνωμεν μίαν τῶν πλευρῶν ΒΓ τῆς ἀγνώστου γωνίας ΑΓΒ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΓΘ τοῦ τριγώνου (§ 36) θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη, καθὼς καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΒΓΗ.

13. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου γραμμῆς ΑΒ (σχ. 84) λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχοντα μεταξύ των ὅσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς δεδομένης πλευρᾶς· ὑψόνομεν εἰς τὸ ἄκρον Α τὴν κάθετον ΑΓ, λαμβάνομεν κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δεδομένην ὑποτείνουσαν, γράφομεν ἓν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΓ εἰς ἓν σημεῖον Γ, καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ.

14. Νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς καθέτου ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ (σχ. 24) δύο πλαγίας ἴσας. Λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Β ἀπέχοντα ἰσάκις ἐκ τοῦ Δ ὅπου ἡ κάθετος τέμνει τὴν ΒΓ, ἑνόνομεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὸ σημεῖον Α τῆς καθέτου, καὶ ἔχομεν τὰς δύο ἴσας πλαγίας ΑΒ καὶ ΑΓ (§ 38).

15. Δοθείσης μιᾶς γωνίας ἑνὸς παραλληλογράμμου, καὶ τῶν πλευρῶν τῶν περιλαμβανουσῶν αὐτήν, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον. Ἐπί τινος ἀπροσδιορίστου γραμμῆς λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 85) ἀπέχοντα μεταξύ των ὅσον εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς τῶν δεδομένων πλευρῶν· κατασκευάζομεν ἔπειτα εἰς

τὸ Α τὴν γωνίαν ΒΑΔ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν, λαμβάνομεν κέντρον τὸ ἴδιον τοῦτο σημεῖον καὶ ἀκτῖνα τὴν δευτέραν δεδομένην πλευρὰν, καὶ καταγράφομεν ἓν τόξον τὸ ὁποῖον προσδιορίζει τὸ ὕψος τῆς πλευρᾶς ΑΔ· φέρομεν ἔπειτα τὴν ΔΓ παράλληλον εἰς τὴν ΑΒ, καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὴν ΑΔ, αἵτινες τέμνονται εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Γ, καὶ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ παραλληλόγραμμον (§. 39, 40.).

Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ὀρθὴ, τὸ σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον· ἐὰν καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι, τετράγωνον· ἐὰν αἱ μὴ προσκείμεναι γωνίαι ἦναι ἴσαι ἀνὰ δύο, καὶ ὅλαι αἱ πλευραὶ ἴσαι, ῥόμβος· — (§ 39).

16 Νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς γωνίας ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου. Διαιροῦμεν τὸ πολύγωνον τοῦτο εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο (§ 42)· ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων (§ 36) ἀφαιροῦμεν τέσσαρας γωνίας ὀρθάς· διαιροῦμεν τὸ κατάλοιπον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν ἢ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἡ τιμὴ μιᾶς τῶν γωνιῶν (§ 43).

17. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἐκτὸς γωνίας ἑνὸς πολυγώνου. Ἡ ἐκτὸς γωνία προσθετομένη εἰς τὴν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου, σχηματίζει δύο γωνίας ὀρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐντὸς γωνίαν ἀπὸ δύο ὀρθὰς, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ἐκτὸς γωνίας τοῦ πολυγώνου [§ 44.]· ἐξεύρομεν δὲ ὅτι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐκτὸς γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς.

18 Νὰ εὕρωμεν ἓν σημεῖον Κ ἀπέχον ἰσάκις ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων Α, Δ, Β [σχ. 32]. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΔ, καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῶν ὑψώσωμεν τὰς καθέτους ΚΕ, ΚΘ, τὸ σημεῖον Κ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον [§ 52].

Διὰ τῆς ἰδίας κατασκευῆς λύομεν τὰ δύο ἀκόλουθα προβλήματα. Νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἢ ἑνὸς δεδομένου τό

ξου. Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου.

19. Νὰ περιγράψωμεν εἰς δεδομένον τρίγωνον μίαν περιφέρειαν. Ἐπειδὴ δυνάμεθα πάντοτε ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν, τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἀνωτέρω. Ὅταν τὸ τρίγωνον ἦναι ὀξειγώνιον, τὸ κέντρον τῆς περιφερείας εἶναι ἐντὸς τοῦ τριγώνου· ὅταν ὀρθογώνιον, εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης· ὅταν δὲ ἀμβλυγώνιον, ἔξω τοῦ τριγώνου.

20. Εἰς δεδομένον σημεῖον τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς νὰ φέρωμεν μίαν ἐφαπτομένην. Εἰς τὸ δεδομένον σημεῖον [σχ. 30] Ν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΝ, τὴν ὁποίαν ἐπεκτείνομεν ἔξω τῆς περιφερείας κατὰ διάστημα ἴσον μὲ τὴν ΚΝ· ἡ δὲ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ν ὑψουμένη κάθετος ΑΝ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη [§ 47].

21. Ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς τῆς περιφερείας νὰ φέρωμεν μίαν ἐφαπτομένην εἰς ταύτην τὴν περιφέρειαν. Ἑνόνομεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας διὰ τῆς εὐθείας ΚΑ· λαμβάνομεν κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς εὐθείας ταύτης καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΚ, καὶ καταγράφομεν δευτέραν περιφέρειαν· ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Ν καὶ Μ, ὅπου αὕτη τέμνει τὴν πρώτην μὲ τὸ δεδομένον σημεῖον Α, καὶ ἔχομεν τὰς δύο εὐθείας ΑΜ, ΑΝ, δι' ὧν λύεται τὸ πρόβλημα.

22. Νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν ὀρθήν. Μὲ ἀκτῖνα ὁποιανδήποτε καταγράφομεν μίαν περιφέρειαν εἰς τὴν ὁποίαν φέρομεν μίαν διάμετρον· εἰς τὸ μέσον ταύτης ὑψόνομεν ἄλλην καθετον, σχηματίζουσαν μὲ τὴν πρώτην γωνίας ὀρθὰς (§ 56)· ἢ διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα μέρη, καὶ ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων σημείων φέρομεν διαμέτρους.

23. Νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου ἢ ἑνὸς παραλληλογράμμου. Ἐὰν ἡ βάσις ἦναι ἴση μὲ 15 μέτρα, καὶ τὸ ὕψος μὲ 7, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θέλει εἶναι ἴσον μὲ 15×7, ἢ 105 τετραγωνικὰ μέτρα [§ 65].

24. Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἀγροῦ τινος ἔχοντος σχῆμα ἀκανόνιστον καὶ δυναμένου νὰ διαιρεθῇ εἰς ἓν ὀρθογώνιον, ἓν παραλληλόγραμμον, ἓν τρίγωνον καὶ ἓν τραπέζιον. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 16 καὶ 8 μέτρα· τοῦ παραλληλογράμμου 21 καὶ 30· τοῦ τριγώνου 27 καὶ 14· τοῦ δὲ τραπεζίου τὸ μὲν ὕψος εἶναι 4 καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων βάσεών του 17 (§ 65, 69). Ἐὰν λογαριάσωμεν τὰς ἐπιφανείας ταύτας, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει 128 μέτρα τετραγωνικὰ, 630, 189, καὶ 68 ἡ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ τραπεζίου· ἀθροίζοντες τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια ἔχει 1015 μέτρα τετραγωνικά.

25. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου. Τὸ πολύγωνον ἔχει 18 πλευράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει 5 μέτρα· τὸ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ μέσον μιᾶς τῶν πλευρῶν διάστημα εἶναι 22 μέτρα· ὅθεν ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι ἴση μὲ 990 τετραγωνικὰ μέτρα (§ 70).

26. Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν ἀκτῖνα. Ἐὰν ἡ περιφέρεια ἦναι ἴση μὲ 50 μέτρα καὶ 265 ὑποχιλιόμετρα, καὶ 8 μέτρα ἡ ἀκτὶς, ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι 201 τετραγωνικὰ μέτρα -- (§ 71).

27. Δοθέντος τοῦ τόξου ἑνὸς τομέως καὶ τῆς ἀκτῖνος, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον τοῦ τομέως εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς προηγουμένης περιφερείας, τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τομέως θέλει εἶναι περίπου 40 τετραγωνικὰ μέτρα (§ 71).

28. Νὰ διαιρέσωμεν δεδομένην τινὰ γραμμὴν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη. Ἐὰν π.χ. ζητῆται νὰ διαιρέσωμεν εἰς πέντε μέρη τὴν γραμμὴν ΟΘ (σχ. 86), ἐκ τοῦ ἄκρου Ο φέρομεν τὴν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΟΒ, καὶ λαμβάνοντες τὸ διάστημα ΟΑ ὁσονδήποτε, τὸ φέρομεν πεντάκις ἐπὶ τῆς ΟΒ εἰς τὸ Γ, Δ, Ε, Β. Ἑνόνομεν τὸ τελευταῖον σημεῖον Β μὲ τὸ ἄκρον Θ, φέρομεν ἔπειτα

τὴν ΑΙ παράλληλον εἰς τὴν ΒΘ, καὶ ἔχομεν τὴν ΟΙ τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΟΘ. Φέροντες τὴν ΟΙ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΟΘ, διαιροῦμεν ταύτην εἰς πέντε ἴσα μέρη· διότι, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΙ καὶ ΘΒ εἶναι παράλληλοι, ΟΒ καὶ ΟΘ τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὸ Α καὶ Ι· ἀλλὰ ἡ ΘΑ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΟΒ, ὅθεν καὶ ἡ ΟΙ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΟΘ (§ 72, 73).

29. Νὰ διαιρέσωμεν γραμμήν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ δεδομένας γραμμάς. Ἔστω ΑΒ (σχ. 87) ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ διαιρέσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τὰς τρεῖς γραμμὰς Χ, Ψ, Ζ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α φέρομεν τὴν ἀπεριόριστον γραμμὴν ΑΓ, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ΑΔ=Χ, ΔΕ=Ψ, ΕΓ=Ζ· ἑνόνομεν τὰ ἄκρα Γ καὶ Β, φέρομεν ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ε τὰς ΔΗ, ΕΘ παραλλήλους εἰς τὴν ΓΒ, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ΑΒ ἐδιαιρέθη εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ, Β εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς Χ, Ψ, Ζ· διότι, ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ ΔΗ, ΕΘ, ΓΒ εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας (§ 72, 73)

ΑΔ: ΔΕ:: ΑΗ: ΗΘ· ΔΕ: ΕΓ:: ΗΘ: ΒΘ·

ἀλλὰ αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΔΕ, ΕΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς Χ, Ψ, Ζ· ὅθεν αἱ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ εἶναι ἀνάλογοι μ' αὐτάς.

30. Νὰ εὕρωμεν μίαν τετάρτην ἀνάλογον μὲ τρεῖς δεδομένας γραμμάς. Ἔστωσαν Χ, Ψ, Ζ (σχ. 87) αἱ τρεῖς δεδομέναι γραμμαί· σύρομεν τὴν ἀπεριόριστον γραμμὴν ΑΓ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α κατασκευάζομεν ὁποιανδήποτε γωνίαν τὴν ΒΑΓ. Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ΑΕ=Ζ, ΑΔ=Ψ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ΑΘ=Χ· ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Θ, φέρομεν τὴν ΔΗ παράλληλον εἰς τὴν ΕΘ καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΕ: ΑΔ:: ΑΘ: ΑΗ, διὰ τῆς ὁποίας γνωρίζομεν ἀμέσως ὅτι ΑΗ εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμή, ἐπειδὴ οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μὲ τὰς τρεῖς δεδομένας γραμμάς [§ 72, 75].

31. Νὰ εὕρωμεν μίαν γραμμὴν ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ πρὸς ἄλλην γραμμὴν λόγον σταθερόν, π. χ. ὡς 3 πρὸς 2. Ἔστω ΑΒ ἡ δεδομένη γραμμὴ (σχ. 88). φέρομεν τὰς δύο γραμμὰς ΓΔ, ΓΕ τεμνο-

μένας ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν· διαιροῦμεν τὴν ΓΔ εἰς τρία ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Δ [πρόβλ. 28]· λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς ΓΕ, ΓΘ=ΑΒ, σύρομεν τὴν ΗΘ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον εἰς τὴν ΗΘ· Ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης (§ 72, 75) συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν ΓΗ: ΓΔ:: ΓΘ: ΓΕ, ἡ ὁποία, ἐπειδὴ ΓΗ εἶναι πρὸς τὴν ΓΔ καθὼς 2 πρὸς 3, τρέπεται εἰς 2: 3:: ΓΘ: ΓΕ· Αἱ γραμμαὶ λοιπὸν ΓΘ, ΓΕ πληροῦσιν εἰς τὰς ζητουμένας συνθήκας.

32. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον ὅμοιον μ' ἄλλο δεδομένον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ δεδομένου λόγον σαθερόν. Ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ [σχ. 50], καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο ὅμοιον μ' αὐτό, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἦναι πρὸς τὰς τοῦ πρώτου ὡς 3 πρὸς 1. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν ἀπεριορίςως τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ἐπεκτάσεώς των λάβωμεν τὰ διαςήματα ΑΟ, ΔΕ ἴσα μὲ τὸ τρίτον τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, καὶ φέρωμεν ἔπειτα τὴν ΟΕ παράλληλον εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ (α), καὶ τὴν ΓΖ παράλληλον εἰς τὴν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷόντι, εἴδομεν (§ 75) ὅτι εἴχαμεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ: ΖΔ:: ΒΓ: ΔΕ· ΑΒ: ΖΔ:: ΑΓ: ΖΕ· ΒΓ: ΔΕ:: ΑΓ: ΖΕ, εἰς τὰς ὁποίας ΔΖ=ΑΟ, ἢ = μὲ τὸ τρίτον τῆς ΑΒ· ΔΕ=$\frac{1}{3}$ΒΓ· ἑπομένως ἡ τελευταία δίδει ΖΕ=$\frac{1}{3}$ΑΓ· ὅθεν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἔχουν πρὸς τὰς τρεῖς τοῦ ΑΒΓ τὸν ζητούμενον λόγον· προσέτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους.

---

(α) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπεκτάσεως τῆς ΑΒ λάβωμεν τὴν ΑΟ ἴσην μὲ τὸ τρίτον τῆς ΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ο φέρωμεν τὴν ΟΕ παράλληλον εἰς τὴν ΑΓ, ἡ ΓΕ θέλει εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΒΓ· διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΒΟΕ συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ: ΑΟ:: ΒΓ: ΓΕ, εἰς τὴν ὁποίαν, ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΑΒ, συνάγεται ὅτι καὶ ἡ ΓΕ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΒΓ.

33. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν πολύγωνον ὅμοιον μ' ἄλλο, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν δεδομένον τινὰ λόγον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Ἔςω 1: 3 ὁ λόγος τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχουν αἱ πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων. Ζητοῦμεν κατὰ πρῶτον μίαν γραμμὴν αϐ (σχ. 52) ἔχουσαν πρὸς τὴν ΑΒ τὸν λόγον 1: 3, κατὰ τὸ 31 πρόϐλημα· ἔπειτα ἄλλην τινὰ ϐγ ἔχουσαν πρὸς τὴν ΒΓ τὸν ἴδιον λόγον, καὶ σχηματίζουσαν μὲ τὴν αϐ γωνίαν αϐγ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ τοῦ δεδομένου πολυγώνου· ἐξακολουθοῦμεν οὕτω νὰ καταγράφωμεν τὰς πλευρὰς αϐ, ϐγ, γδ, τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, ὥςε νὰ ἦναι παράλληλοι καὶ ἀνάλογοι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἕως ὅτου νὰ σχηματίσωμεν τὸ πολύγωνον αϐγδεζ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι εἰς τὰς τοῦ δεδομένου, καὶ περιπλέον αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς ἔχουν πρὸς τὰς τοῦ ἄλλου τὸν λόγον 1: 3 [§ 78].

34. Ζητεῖται μία περιφέρεια ἔχουσα πρὸς ἄλλην δεδομένην τὸν λόγον 1: 5. Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι μεταξύ των, ὡς αἱ ἀκτῖνες ἢ αἱ διάμετροι (§ 79.), ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς δεδομένης περιφερείας εἰς πέντε ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάϐωμεν ἓν τούτων τῶν μερῶν ὡς ἀκτῖνα τῆς ζητουμένης περιφερείας.

35. Νὰ εὕρωμεν μεταξὺ δύο δεδομένων γραμμῶν μίαν μέσην ἀνάλογον. Ἔςωσαν ΑΔ καὶ ΒΔ (σχ. 53) αἱ δύο δεδομέναι γραμμαί· προσθέτομεν τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης, λαμϐάνομεν τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ὡς διάμετρον, καὶ φέρομεν τὴν περιφέρειαν ΑΓΒ. Εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὅπου αἱ δεδομέναι γραμμαὶ ἑνόνονται, ὑψόνομεν τὴν κάθετον ΓΔ, καὶ αὕτη θέλει εἶναι ἡ μέση ζητουμένη ἀνάλογος, διότι ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ τὸ Γ διὰ τῶν γραμμῶν ΑΓ, ΒΓ, σχηματίζομεν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ, τὰ ὁποῖα δίδουν τὴν ἀναλογίαν -- (§ 80) ΑΔ: ΔΓ:: ΔΓ: ΒΔ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $ΓΔ^2 = ΑΔ \times ΒΔ$· ἀλλ' αἱ ΑΔ, ΒΔ εἶναι αἱ δεδομέναι γραμμαί· ὅθεν ἡ ΔΓ εἶναι ἡ μέση μεταξὺ αὐτῶν ἀνάλογος.

Δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην ἀνάλογον. Λαμβάνομεν τὴν μεγαλητέραν τῶν γραμμῶν, ἢ τὴν ΑΒ ὡς διάμετρον· καταγράφομεν ἐπ' αὐτῆς τὴν περιφέρειαν, καὶ ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ σημείου Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ μέρος ΑΔ ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν γραμμήν· ὑψόνομεν εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν κάθετον ΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ Γ, ὅπου αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, φέρομεν τὰς γραμμὰς ΓΑ, ΓΒ. Ἡ γραμμὴ ΓΑ πληρεῖ εἰς τὴν ζητουμένην συνθήκην, ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ: ΑΓ:: ΑΓ: ΑΔ, ἢ $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΑΔ$ (§ 80), ὡσαύτως καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΑΒ καὶ ΒΔ.

36. Νὰ εὕρωμεν μίαν γραμμὴν ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἐπὶ δύο ἄλλων δεδομένων κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ προηγούμενον· διότι τὸ ἐπὶ τῆς μέσης ἀναλόγου ΔΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπὶ τῶν δύο δεδομένων γραμμῶν ΑΔ, ΒΔ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $ΑΔ \times ΒΔ$.

37. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον, γνωρίζοντες τὸ γινόμενον καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο προσκειμένων αὐτοῦ πλευρῶν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται ἀκόμη διὰ τοῦ προηγουμένου· διότι ἐὰν ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου ΑΒ (σχ. 89) τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, καταγράψωμεν τὴν περιφέρειαν ΑΓΒ, καὶ εἰς τὸ ἄκρον Α ὑψώσωμεν μίαν κάθετον ΑΕ ἴσην μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεδομένου γινομένου $ΑΔ \times ΒΔ$, καὶ φέρωμεν ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Ε μίαν παράλληλον εἰς τὴν γραμμὴν ΑΒ ἕως νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ, ἡ κάθετος ΓΔ θέλει διαιρέσει τὴν ΑΒ εἰς δύο μέρη τὰ ὁποῖα θέλουσιν εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

38. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων δεδομένων τετραγώνων. Ἔστωσαν ΑΓ καὶ ΒΓ (σχ. 54) αἱ πλευραὶ τῶν δύο δεδομένων τετραγώνων. Εἰς τὸ ἄκρον Γ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ὑψόνομεν μίαν κάθετον ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Β, ἀπέχον ἐκ τοῦ Γ κατὰ τὸ μῆκος τῆς

δεδομένης πλευρᾶς ΒΓ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β φέρομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ ἡ ὁποία θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου (§ 81).

39. Νὰ εὕρωμεν ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τριῶν ἄλλων δεδομένων τετραγώνων. Ζητοῦμεν κατὰ πρῶτον ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο τούτων τετραγώνων, ἔπειτα ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦτο καὶ μὲ τὸ τρίτον τετράγωνον, κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Δυνάμεθα διὰ τοῦ τρόπου τούτου νὰ εὕρωμεν ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον ὁσωνδήποτε ἄλλων τετραγώνων.

40. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων τετραγώνων. Κατασκευάζομεν μίαν ὁποιανδήποτε ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΒ, λαμβάνομεν ἔπειτα τὴν ΓΒ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν ἑνὸς τῶν δεδομένων τετραγώνων, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ Β ὡς κέντρον, καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, καὶ καταγράφομεν ἓν τόξον τέμνον εἰς τὸ Α τὴν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας. Τὸ ἐπὶ τῆς ΑΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, ἐπειδὴ $ΑΓ^2=ΑΒ^2-ΒΓ^2$ [§ 81].

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν ὁσωνδήποτε ἄλλων τετραγώνων.

41. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ἔχον πρὸς ἄλλο δεδομένον τὸν λόγον 3: 5. Ἐπὶ τῆς ἀπεριορίστου γραμμῆς ΑΒ [σχ. 90], λαμβάνομεν τὰ μήκη ΓΒ=3 καὶ ΑΓ= 5. ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς διάμετρον, καταγράφομεν μίαν ἡμιπεριφέρειαν· εἰς τὸ σημεῖον Γ ὑψόνομεν τὴν κάθετον ΓΔ, καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ, ὅπου αὕτη συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν, φέρομεν τὰς χορδὰς ΔΑ, ΔΒ, τὰς ὁποίας ἐκτείνομεν ἀπεριορίστως. Ἐπὶ τῆς πρώτης λαμβάνομεν τὴν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον εἰς τὴν ΑΒ· ἡ ΔΖ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Τῳόντι αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΕΖ [§ 72, 73] δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΔΖ: ΔΕ:: ΒΔ: ΑΔ, τῆς ὁποίας τοὺς ὅρους ὑψόνομεν εἰς τὰ τετράγωνα [σελ. 111] καὶ ἔχομεν $ΔΖ^2: ΔΕ^2:: ΒΔ^2: ΑΔ^2$.

ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν [§ 80] $ΑΒ=\frac{ΑΔ^2}{ΑΓ}$ καὶ $ΑΒ=\frac{ΒΔ^2}{ΒΓ}$· ἄρα $ΑΔ^2 \times ΒΓ = ΒΔ^2 \times ΑΓ$, ἢ $ΒΔ^2 : ΑΔ^2 :: ΒΓ : ΑΓ$· Συγκρίνοντες τὴν ἀναλογίαν ταύτην μὲ τὴν προηγουμένην, λαμβάνομεν· $ΔΖ^2 : ΔΕ^2 :: ΒΓ : ΑΓ$· ἀλλὰ ΒΓ=3, ΑΓ=5, ἄρα $ΔΖ^2 : ΔΕ^2 :: 3 : 5$· δηλ. τὸ ἐπὶ τῆς ΔΖ κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς ΔΕ ὡς 3 πρὸς 5.

42. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον διπλάσιον ἄλλου δεδομένου. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας λαμβάνομεν [ὑποθέτοντες Π τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου καὶ Χ τὴν τοῦ ζητουμένου] τὴν $Π^2 : Χ^2 :: 1 : 2$· ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $Χ=Π\sqrt{2}$· καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου ἴσην μὲ τὴν μονάδα, ἔχομεν $Χ=\sqrt{2}$.

Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 91) λαμβάνομεν $ΑΒ^2+ΒΓ^2=ΑΓ^2$· ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΒ=ΒΓ, ἔχομεν $ΑΓ^2=2ΒΓ^2$· καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ΒΓ=1, εὑρίσκομεν $ΑΓ^2=2$· ὅθεν τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ἓν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα· ὅθεν τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

Ἡ ἔκφρασις $ΑΓ=ΒΓ\sqrt{2}$ δεικνύει ἀκόμη ὅτι δὲν ὑπάρχει μέτρον κοινὸν μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου [§ 85].

43. Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ ἄλλου δεδομένου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ τοῦ προηγουμένου· διότι, ἐὰν λάβωμεν τὴν πλευρὰν (σχ. 30) ΒΔ τοῦ δεδομένου τετραγώνου ὡς διάμετρον, καὶ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν ΒΘΔ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Κ ὑψώσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΘΚ κάθετον εἰς τὴν διάμετρον ταύτην, ἡ ἑνόνουσα χορδὴ ΘΒ τὰ ἄκρα τῶν

δύο ἀκτίνων, εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου·

44. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ ἓν δεδομένον παραλληλόγραμον· Ἔςω Β ἡ βάσις καὶ Α τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου· μεταξὺ τῶν γραμμῶν τούτων [πρόβλ. 25] εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον Δ (§ 80), καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν Α: Δ:: Δ: Β, ἢ $Δ^2=Α\times Β$· Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι $Α\times Β$, τὸ δὲ τοῦ ἐπὶ τῆς μέσης ἀναλόγου Δ κατασκευαζομένου τετραγώνου, $Δ^2$· καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς Δ κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐπὶ τῶν γραμμῶν Α καὶ Β κατασκευαζόμενον παραλληλόγραμμον.

45. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ ἓν τρίγωνον· Μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου τούτου [§ 68] ζητοῦμεν μίαν μέσην ἀνάλογον, καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς μέσης ἀναλόγου κατασκευάζομεν τὸ ζητούμενον τετράγωνον·

46. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ ἓν δεδομένον τετράγωνον. Φέρομεν εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ [σχ. 92] τὴν διαγώνιον ΒΓ, ἐπεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΓΔ, καὶ λαμβάνομεν ΔΕ=ΓΔ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Ε σύρομεν τὴν ΒΕ· Τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὸ ὕψος τοῦ τετραγώνου, καὶ τὸ διπλάσιον τῆς βάσεως αὐτοῦ (§ 68).

47. Νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ ὁποιονδήποτε τετράπλευρον· Ἔςω ΑΒΓΔ (σχ. 93) τὸ δεδομένον τετράπλευρον, ΖΕ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γραμμῶν ΒΓ, ΑΔ, καὶ ΓΘ ἐπίσης τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γραμμῶν ΑΒ καὶ ΔΓ. Εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΘ ὑψόνομεν μίαν κάθετον, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Η κειμένου εἴς τι διάςημα διπλάσιον τοῦ ΖΕ, φέρομεν τὰς πλαγίας ΗΘ, ΗΓ· Τὸ ΗΘΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον· ἐπειδὴ μέτρον αὐτοῦ εἶναι τὸ $ΓΘ\times ΖΕ$, καὶ τὸ γινόμενον τῶν γραμμῶν τούτων παριςάνει ὡσαύτως τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου τετραπλεύρου·

48. Νὰ ἐγγράψωμεν ἓν τετράγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν· Φέρομεν εἰς τὴν δεδομένην περιφέρειαν δύο διαμέτρους τεμνομένας

κατ' ὀρθὴν γωνίαν, ἑνόνομεν ἔπειτα ἀνὰ δύο τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων τούτων, καὶ ἔχομεν τὸ εἰς τὴν περιφέρειαν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον (§ 61).

49. Νὰ ἐγγράψωμεν ἓν ὀκτάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν. Ἐγγράφομεν κατὰ πρῶτον ἓν τετράγωνον, ἔπειτα ἐκ τοῦ κέντρου Κ [σχ. 42] φέρομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τετραγώνου τούτου τὴν κάθετον ΚΖ, τὴν ὁποίαν ἐπεκτείνομεν ἕως νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· σύρομεν ἐκ τῶν σημείων Ε καὶ Α τὴν χορδὴν ΑΕ, καὶ λαμβάνομεν τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου ὀκταγώνου. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ὡσαύτως εἰς τὴν περιφέρειαν τὸ δεκαεξάγωνον, φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΕ τοῦ ὀκταγώνου μίαν κάθετον, καὶ τὸ σημεῖον Η, ὅπου ἡ κάθετος αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, προσδιορίζει τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΗ οὔσης μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ δεκαεξαγώνου. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐγγράψωμεν διαδοχικῶς εἴς τινα περιφέρειαν τὰ ἐκ 4, 8, 16, 32, 64, κτλ., πλευρῶν πολύγωνα.

50. Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δεδομένην περιφέρειαν ἑξάγωνον κανονικόν. Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 94) ἡ δεδομένη περιφέρεια, Α ἡ ἀκτὶς αὐτῆς, καὶ ΑΖ ἐξ ὑποθέσεως ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΖ, ΟΑ καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΖ. Ἡ γωνία ΑΟΖ εἶναι ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν 4 ὀρθῶν, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΖ εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ 2 ὀρθὰς ἀφαιρέσωμεν $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$, μένει $\frac{4}{3}$ ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Α καὶ Ζ· ἀλλ' ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἴσαι, ἑκάστη λοιπὸν τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{3}$· τὸ τρίγωνον ἄρα ΟΑΖ εἶναι ἰσόπλευρον, ἑπομένως ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα. Ὅθεν ἐὰν φέρωμεν ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας τὴν ἀκτῖνα, ἐγγράφομεν τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον.

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τοῦ ἑξαγώνου τούτου, λαμβάνομεν τὸ ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΕΓ. Ἐπειδὴ ΖΟ=ΕΖ= μὲ τὴν ἀκτῖνα Α, τὸ σχῆμα ΟΑΖΕ εἶναι ῥόμβος, ἑπομένως αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται κατ' ὀρθὴν γωνίαν (§ 39), καὶ δίδουν ΖΗ=ΗΟ = $\frac{1}{2}$ Α, 2ΕΗ=ΑΕ. Ἀλλὰ ΕΗ$^2$= ΕΖ$^2$ —

$ZH^2 = A^2 + \frac{1}{4}A^2 = \frac{3}{4}A^2$. ὅθεν. $EH = \sqrt{\frac{3}{4}A^2} = \frac{1}{2}A\sqrt{3}$. ἑπομένως ἡ πλευρὰ 2EH=EA τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μὲ $A\sqrt{3}$.

Διαιροῦντες εἰς 2, 4, 8 - - - ἴσα μέρη τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ -- ἐγγράφομεν τὰ ἐκ 12, 24, 48 πλευρῶν πολύγωνα.

51. Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 95) εἰς δύω μέρη, ὥςε τὸ μεγαλήτερον νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης γραμμῆς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους. Εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς ΑΒ ὑψόνομεν τὴν κάθετον (προβ. 3) ΒΚ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ. Λαμβανοντες κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΚ, καταγράφομεν μίαν περιφέρειαν· ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Κ καὶ Α διὰ τῆς εὐθείας ΑΚ τῆς τεμνούσης τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· λαμβάνομεν ΑΔ= ΑΖ, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὸ Ζ κατὰ τὸν ζητούμενον τρόπον, δηλ. ΑΒ: ΑΖ:: ΑΖ: ΖΒ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἔχομεν κατὰ πρῶτον τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΔΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια ἐπειδὴ ἔχουν τὴν γωνίαν Α κοινὴν, τὴν ΑΕΒ=ΔΒΑ, διότι ἡ πρώτη ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΒ (§59), ἡ δὲ δευτέρα, οὖσα ἡ διαφορὰ τῆς ὀρθῆς ΑΒΓ καὶ τῆς ΔΒΓ, τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΒΔΓ καὶ ΒΔ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΒ. Τὰ ὅμοια λοιπὸν ταῦτα τρίγωνα δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΕ: ΑΒ::ΑΒ: ΑΔ· ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν (§63) τὴν ΑΕ—ΑΒ: ΑΒ :: ΑΒ—ΑΔ : ΑΔ, μεταβαλλομένην εἰς ΑΖ: ΑΒ :: ΖΒ: ΑΖ, διότι ΑΒ= ΔΕ, ΑΕ—ΑΒ=ΑΔ = ΑΖ. ΑΒ—ΑΔ=ΖΒ· Ἀντιςρέφοντες λοιπὸν (§63) τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας ταύτης λαμβάνομεν ΑΒ: ΑΖ:: ΑΖ: ΖΒ· Ὁ τρόπος οὗτος τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς ΑΒ ὀνομάζεται διαίρεσις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

52. Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δεδομένην περιφέρειαν κανονικὸν δεκάγωνον. Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΟ [σχ. 96] εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, καὶ ἔχομεν ΑΟ: ΟΜ::ΟΜ: ΑΜ· λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὸ μεγαλήτερον μέρος ΟΜ, καὶ ἡ χορδὴ αὐτὴ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ φέρωμεν δεκάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας. Φέροντες τὴν ΜΒ, ἔχομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ διότι ΑΒ = ΟΜ, τὴν ἀναλογίαν ΑΟ: ΑΒ::

AB: AM· ὅθεν τὰ τρίγωνα ABO, AMB, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν κοινὴν περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια (§ 77), καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ABO εἶναι ἰσοσκελὲς, ἄρα ἐπίσης εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ AMB, καὶ ἔχομεν AB=BM· ἐπειδὴ δὲ AB=OM, ἔχομεν καὶ BM=OM, καὶ τὸ τρίγωνων BMO ὡσαύτως εἶναι ἰσοσκελές· Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου BMO γωνία AMB, εἶναι διπλασία τῆς ἐντὸς O (§ 26) καὶ ἴση μὲ τὴν MAB· ὅθεν ἑκάστη τῶν εἰς τὴν βάσιν γωνιῶν OAB καὶ OBA τοῦ τριγώνου OAB εἶναι διπλασία τῆς εἰς τὴν κορυφὴν O· αἱ τρεῖς λοιπὸν τοῦ τριγώνου OAB γωνίαι ἰσοῦνται μὲ τὸ πενταπλάσιον τῆς O· ἡ γωνία λοιπὸν αὔτη εἶναι τὸ πέμπτον τῶν δύο ὀρθῶν, ἢ τὸ δέκατον τῶν τεσσάρων· τὸ τόξον ἄρα AB εἶναι τὸ δέκατον τῆς περιφερείας· καὶ ἡ χορδὴ AB ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

53. Νὰ ἐγγράψωμεν ἓν πεντάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ τοῦ προηγευμένου, ἐπειδὴ ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς ἀναλλὰξ κορυφὰς τοῦ δεκαγώνου, λαμβάνομεν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον· Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν πολύγωνα ἐξ 20, 40, 80 --- πλευρῶν. Ἐὰν ἀπὸ τὸ τόξον, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑποτείνει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἤτοι ἀπὸ τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας, ἀφαιρέσωμεν τὸ τόξον ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑποτείνει ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου, ἤτοι τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, ἔχομεν $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$· δυνάμεθα λοιπὸν ἐπίσης νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνα καὶ πολύγωνα ἐκ 30, 60 ἢ 120 πλευρῶν.

54. Νὰ εὕρωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι δεδομένη. Ἔστω ἡ ἀκτὶς A=15 μέτρα· ἐκ τοῦ τύπου 2πA (§ 88) συνάγομεν ἀμέσως ὅτι ἡ περιφέρεια ἰσοδυναμεῖ μὲ 94 μέτρα καὶ 25 ὑφεκατόμετρα.

55. Γνωστῆς οὔσης τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς. Ἐὰν ἡ περιφέρεια αὕτη ἰσοῦται μὲ 94 μέτρα καὶ 25 ὑφεκατόμετρα, ἐκ τοῦ τύπου 2πA=94, 25 συνάγομεν A=94, 25: 2π=15 μέτρα.

56. Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου γνωρίζοντες τὴν ἀκ-

ακτῖνα αὐτοῦ· Ἐὰν $A=15$ μέτρα, συνάγομεν ἐκ τοῦ τύπου $\pi A^2$ (§ 89.), ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ 706 μέτρα καὶ 86 ὑφεκατόμετρα τετραγωνικά·

57. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκτῖνα γνωρίζοντες τὸ ἐμβαδὲν τοῦ κύκλου. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ἦναι 706 μέτρα καὶ 86 ὑφεκατόμετρα τετραγωνικὰ, ἔχομεν $\pi A^2 = 706,86$, καὶ $A = \sqrt{(706,86:\pi)} = 15$ μέτρα·

58. Γνωρίζοντες τὴν ἀκτῖνα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου. Ἔσω T τὸ δεδομένον τόξον, ἐκφραζόμενον εἰς μοίρας καὶ μέρη τῆς μοίρας, καὶ M τὸ μῆκος αὐτοῦ. Κάμνομεν τὴν ἀναλογίαν $360^0 : T :: 2\pi A : M$ ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $M = \frac{T \times 2\pi A}{360} = \frac{T \times \pi A}{180}$. Ἐὰν λάβωμεν $T = 75^0$ καὶ $A = 287$ μέτρα, εὑρίσκομεν $M = 375$ μέτρα καὶ 83 ὑφεκατόμετρα.

59. Νὰ εὕρωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι 25 μέτρα· καὶ τὸ ὕψος 7. Διὰ τοῦ δοθέντος κανόνος [§ 107] συνάγομεν 175 τετραγωνικὰ μέτρα·

60. Νὰ εὕρωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι γνωστὴ καθὼς καὶ τὸ ὕψος μιᾶς τῶν ἑδρῶν της. Ἔσω 90 μέτρα ἡ περίμετρος τῆς βάσεως, καὶ 24 τὸ ὕψος· Ἡ κυρτὴ αὕτη ἐπιφάνεια εἶναι (§ 107) 1080 τετραγωνικὰ μέτρα·

61. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν στερεότητα τοῦ πρίσματος τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος [§ 110]. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τριγωνικὴ βάσις εἶναι 25 τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ τὸ ὕψος 16, ἡ στερεότης τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 400 κυβικὰ μέτρα·

62. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον προσδιορίζομεν τὴν στερεότητα τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος, γνωρίζοντες τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος του·

Αἱ τρεῖς διαστάσεις πελεκημένης τινὸς πέτρας εἰς σχῆμα πα-

ραλληλεπιπέδου εἶναι 6, 4 καὶ 3. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τρεῖς τούτους ἀριθμοὺς, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ϛερεότης αὐτῆς εἶναι 72 μέτρα κυβικά.

63. Νὰ εὕρωμεν τὴν ϛερεότητα μιᾶς πολυγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος. Ἐὰν ἡ βάσις ἦναι π. χ. 65 τετραγωνικὰ, καὶ τὸ ὕψος 18 μέτρα, εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι ἡ ϛερεότης τῆς πυραμίδος εἶναι 390 κυβικὰ μέτρα.

64 Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος τὸ ὁποῖον πυραμίς τις ἔχουσα βάσιν ἴσην μὲ τὴν βάσιν ἄλλης δεδομένης πρέπει νὰ ἔχῃ, ὥςε ἡ ϛερεότης αὐτῆς νὰ ἦναι τὸ ὄγδοον τῆς δευτέρας. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\Upsilon=24$ τὸ ὕψος τῆς δεδομένης πυραμίδος, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς βάσεως $6=20$ μέτρα τετραγωνικὰ, ἡ ϛερεότης αὐτῆς θέλει εἶναι $\Sigma=\frac{1}{3}6\Upsilon$ (§ 112). ἐὰν δὲ καλέσωμεν σ τὴν ϛερεότητα τῆς ζητουμένης καὶ y τὸ ὕψος αὐτῆς, ἡ ϛερεότης ταύτης θέλει εἶναι $\sigma=\frac{1}{3}6y$. ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων λαμβάνομεν $\Sigma:\sigma::\frac{1}{3}6\Upsilon:\frac{1}{3}6y$. ἀλλ' ἔχομεν $\Sigma:\sigma::8:1$, ἄρα $8:1::\Upsilon:y$. ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης συνάγομεν $y=\frac{1}{8}\Upsilon=3$. κατὰ τὸ ὕψος τοῦτο λογαριάζοντες τὴν ϛερεότητα τῆς νέας ταύτης πυραμίδος, εὑρίσκομεν αὐτὴν ἴσην μὲ 20 μέτρα κυβικὰ, ἢ μὲ τὸ ὄγδοον τῶν 160.

65. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν ϛερεότητα τοῦ κολούρου πρίσματος, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 13, 15 καὶ 17 μέτρα, καὶ 37 τετραγωνικὰ ἡ βάσις του. Ἐὰν λάβωμεν τὸ τρίτον 15 τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν πλευρῶν, καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ μὲ τὴν βάσιν 37, εὑρίσκομεν τὴν ϛερεότητα τοῦ πρίσματος ἴσην μὲ 557 κυβικὰ μέτρα.

66. Νὰ εὕρωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 20 μέτρα, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 6. Ζητοῦντες κατὰ πρῶτον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, εὑρίσκομεν [§ 83.] αὐτὴν ἴσην μὲ 37 μέτρα καὶ 70 ὑφεκατόμετρα· πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα τὴν περιφέρειαν ταύτην μὲ τὸ ὕψος 20.

εὑρίσκομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἴσην μὲ 754 μέτρα τετραγωνικά·

67 Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ ἰδίου κυλίνδρου, προσθέτομεν εἰς τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο βάσεων ἰσοδυναμοῦσαν μὲ δὶς 113 τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἴσην μὲ 980 τετραγωνικὰ μέτρα.

68. Νὰ εὕρωμεν τὴν ςερεότητα τοῦ κυλίνδρου τούτου· Ἐπειδὴ εἴδομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς του εἶναι ἴση μὲ 113 μέτρα τετραγωνικὰ, τὸ δὲ ὕψος του 20 μέτρα· ἄρα ἡ ςερεότης του εἶναι 2260 μέτρα κυβικά (§ 120)·

69. Ποίαν ἀκτῖνα πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ βάσις κυλίνδρου τινὸς ἔχοντος ὕψος τετραπλάσιον ἄλλου δεδομένου, ὥςε ἡ ςερεότης αὐτοῦ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν τοῦ δεδομένου· Ἐὰν καλέσωμεν Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ Υ το ὕψος του, ἡ ςερεότης αὐτοῦ θέλει εἶναι $\pi A^2 \times Y$ [§ 120]· ὑποθέτοντες δὲ α τὴν ἀκτῖνα καὶ 4Υ τὸ ὕψος τοῦ ἄλλου κυλίνδρου, ἔχομεν τὴν ςερεότητα αὐτοῦ $\pi a^2 \times 4Y$· Αἱ δύο αὗται τιμαὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι, ἔχομεν $\pi A^2 \times Y = \pi a^2 \times 4Y$, ἢ $A^2 = 4a^2$, ἑπομένως $a = \frac{1}{2}A$, ἡ ἀκτὶς δηλ· τοῦ νέου κυλίνδρου πρέπει νὰ ἦναι τὸ ἥμισυ τοῦ δεδομένου·

70. Νὰ εὕρωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθοῦ καὶ κυκλικοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως Α εἶναι δεδομένη καθὼς καὶ τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς Μ· Ἐὰν ὑποθέσωμεν Α= 6 μέτρα καὶ Μ= 24, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως θέλει εἶναι 37, 70 μέτρα, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια 452, 40 τετραγωνικά [§ 123]·

71. Νὰ εὕρωμεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ ἰδίου κώνου. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν 452, 40 τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως 113, ὅλη ἡ ἐπιφάνεια θέλει εἶναι 555, 40 τετραγωνικὰ μέτρα·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ςερεότητα τοῦ ἰδίου κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν 113 μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους [§ 125]

8, καὶ ἔχομεν τὴν στερεότητα αὐτοῦ ἴσην μὲ 904 κυβικὰ μέτρα.

72. Δοθείσης τῆς ἀκτῖνος μιᾶς σφαίρας νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ἀκτῖνα ἴσην μὲ 2 μέτρα, ἐκ τοῦ τύπου $4\pi A^2$ (§ 130) εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἴσην μὲ 50, 26 τετραγωνικὰ μέτρα.

73. Νὰ εὕρωμεν ἕνα κύλινδρον τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ ἦναι διπλασία τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἐχούσης τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα τὴν ὁποίαν καὶ ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκόλως (§132), ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου πρέπει νὰ ἦναι διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

74. Ἐὰν ἐπί τινος μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ὑψώσωμεν ἕνα κῶνον ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον τοῦτον, ποῖον πρέπει νὰ ἦναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ὥστε ἡ ἐπιφάνειά του νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν τῆς σφαίρας; Τὸ μῆκος τοῦτο πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας (§133).

75. Ποία πρέπει νὰ ἦναι ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας ὥστε ἡ ἐπιφάνειά της νὰ ἦναι 16 φορὰς μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας ἄλλης δεδομένης; Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν, ὑποθέτοντες $\alpha$ καὶ $A$ τὰς ἀκτῖνας τῶν σφαιρῶν, $\varepsilon$ καὶ $E$ τὰς ἐπιφανείας των, $E : \varepsilon :: A^2 : \alpha^2$. ἀλλ' ἐπειδὴ ζητεῖται ὥστε $E$ νὰ ἦναι πρὸς $\varepsilon :: 16 : 1$, συνάγομεν $1 : 16 :: \alpha^2 : A^2$, ἢ $A^2 = 16\,\alpha^2$, ἢ $A = 4\alpha$. Ὅθεν ἡ ἀκτὶς τῆς νέας σφαίρας πρέπει νὰ ἦναι τετραπλασία τῆς δεδομένης σφαίρας, ὥστε ἡ ἐπιφάνειά της νὰ ἦναι 16 φορὰς μεγαλητέρα.

76. Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς ζώνης τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 20 μέτρα, καὶ ἡ ἀκτὶς $A$ τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει, ἴση μὲ 7. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου θέλει εἶναι ἴση μὲ 44 μέτρα, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης 880 τετραγωνικὰ μέτρα (§135).

77. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀτράκτου τῆς ἰδίας σφαίρας τοῦ σχηματιζομένου ἐκ δύο ἐπιπέδων περιλαμβανόντων τὸ ἕκτον τῆς

περιφερείας, εἶναι τὸ ἕκτον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἢ 8,38 μέτρα τετραγωνικὰ (προβ. 72).

78. Νὰ εὕρωμεν τὴν ςερεότητα τῆς σφαίρας (προβ. 72). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειάν της 50 μέτρα καὶ 26 ὑφεκατόμετρα μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος (§140, 141), λαμβάνομεν 33, 50 κυβικὰ μέτρα· ἢ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν κύβον τῆς ἀκτῖνός της 8 μὲ τὰ τέσσαρα τρίτα 4,19 τοῦ ἀριθμοῦ $\pi = 3, 14159$, εὑρίσκομεν ἐπίσης τὴν ςερεότητα αὐτῆς ἴσην μὲ 38, 50.

79. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ ςερεότης νὰ ἦναι τὸ ἑξαπλάσιον τῆς ςερεότητος δεδομένης τινὸς σφαίρας. Ἐὰν καλέσωμεν Α τὴν ἀκτῖνα τῆς δεδομένης σφαίρας, ἡ ςερεότης αὐτῆς θέλει εἶναι $\frac{4}{3}\pi A^3$, καὶ τὸ ἑξαπλάσιον τῆς ςερεότητος ταύτης, $\frac{24}{3}\pi A^3$ ἢ $8\pi A^3$. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου εἶναι α καὶ Υ τὸ ὕψος του, ἡ ςερεότης του θέλει εἶναι $\pi a^2 \times Y$· ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται τιμαὶ πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι, ἔχομεν $8\pi A^3 = \pi a^2 \times Y$, ἢ $8A^3 = a^2 \times Y$. Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης αὕτη ἔχει δύο ἀγνώςους α καὶ Υ, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριςον, καὶ δέχεται ἀπείρους λύσεις. Ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀκτῖνα α τοῦ κυλίνδρου ἴσην μὲ τὴν τῆς σφαίρας Α, ἔχομεν $Y = 8A$, δηλ. τὸ ὕψος Υ τοῦ κυλίνδρου πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας διὰ νὰ ἔχῃ ςερεότητα ἑξάκις μεγαλητέραν.

Ἐὰν ἐξ ἐναντίας λάβωμεν τὸ ὕψος Υ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα Α τῆς σφαίρας, ἔχομεν $a^2 = 8A^2$, ἢ $a = A\sqrt{8} = 2,83 \cdot A$, ἢ τὴν α σχεδὸν ἴσην μὲ τὸ τριπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

80. Νὰ εὕρωμεν τὸν κῶνον τοῦ ὁποίου ἡ ςερεότης εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ςερεότητος δεδομένης τινὸς σφαίρας. Ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας εἶναι $\frac{4}{3}\pi A^3$ τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι $\frac{2}{3}\pi A^3$. Ἡ δὲ τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα α καὶ ὕψος Υ εἶναι $\frac{1}{3}\pi a^2 \times Y$· ὅθεν $\frac{1}{3}\pi a^2 \times Y = \frac{2}{3}\pi A^3$ ἢ $a^2 \times Y = 2A^3$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, ἀπροσδιόριςον· Ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀκτῖνα α τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἴσην μὲ Α, ἔχομεν $Y = 2A$, ἢ τὸ ὕψος τοῦ κώνου ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἐὰν ἐξ-

ἐναντίας λάβωμεν τὸ ὕψος Υ ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, λαμβάνομεν $\alpha^2 = A^2$, ἢ $\alpha = A$· ἤτοι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου πρέπει νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ὥστε ἡ στερεότης του νὰ ἦναι τὸ ἥμισυ τῆς στερεότητος τῆς σφαίρας ταύτης (§ 142).

81. Νὰ εὕρωμεν μίαν σφαῖραν τῆς ὁποίας ἡ στερεότης νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν στερεότητα ἄλλης δεδομένης σφαίρας λόγον σταθερόν. Ἔστω ὁ λόγος οὗτος 1:8. Ἐπειδὴ αἱ στερεότητες τῶν σφαιρῶν τῶν ἐχουσῶν ἀκτῖνας Α καὶ α εἶναι $\frac{4}{3}\pi A^3$, $\frac{4}{3}\pi\alpha^3$, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{4}{3}\pi A^3 : \frac{4}{3}\pi\alpha^3 :: 1 : 8, \text{ ἢ } A^3 : \alpha^3 :: 1 : 8.$$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης συνάγομεν $\alpha^3 = 8A^3$, ἢ $\alpha = 2A$· δηλ. ἡ στερεότης της νέας σφαίρας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς δεδομένης, εἶναι ὀκτάκις μεγαλητέρα.

82. Νὰ εὕρωμεν τὴν στερεότητα τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, γνωρίζοντες τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάσις του. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εὑρεθείσης ζώνης (πρόβ. 76) μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος, ἢ μὲ 2, 33 μέτρα, ἔχομεν τὴν στερεότητα τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἴσην μὲ 204 κυβικὰ μέτρα (§ 143).

83. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν στερεότητα τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος γνωρίζοντες τὴν μεταξὺ τῶν δύο κύκλων, οἵτινες εἶναι βάσεις αὐτοῦ, περιλαμβανομένην ἄτρακτον. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀκόμη τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εὑρεθέντος ἀτράκτου (πρόβ. 77) μὲ 2, 33, ἤτοι μὲ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος, εὑρίσκομεν τὴν στερεότητα τοῦ ὄνυχος ἴσην μὲ 19,65 κυβικὰ μέτρα.

**ΤΕΛΟΣ.**

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΤΩΝ.

### Ναυπλίας.

| | Σωμ. |
|---|---|
| Μιχαὴλ Ἰατρός. | 2 |
| Βελ. Παυλίδης. | 1 |
| Π. Μερίκας. | 1 |
| Γεώρ. Πετρόπουλος. | 1 |
| Ἰ. Ἰατρίδης. | 1 |
| Δ. Ψαρόπουλος. | 1 |
| Χαδούλης Ἰωάννου. | 1 |
| Ἰ. Λαμπρυνίδης. | 1 |
| Δ. Ἀμπελᾶς. | 1 |
| Θ. Ἡλιόπουλος. | 1 |
| Κ. Πολυάδης. | 1 |
| Γεώρ. Ἀρσενικὸς καὶ συντρ. | 1 |
| Ἀντ. Ἀ. Πατεράκης. | 1 |
| Λιμπέρης Γιανακόπουλος. | 1 |
| Ν. Δημητριάδης. | 1 |
| Κωνς. Π. Μαυρογορδάτος. | 1 |
| Γ. Μιχαλόπουλος. | 1 |
| Δημητρ. Οἰκονόμου. | 1 |
| Ἡλίας Σακελλάριος. | 1 |
| Κ. Ν. Μαυρογορδάτος. | 1 |
| Μ. Ἀργυρόπουλος. | 2 |
| Κ. Ν. Λεβίδης. | 1 |
| Δ. Δρόσος. | 1 |
| Θ. Σχινᾶς. | 1 |
| Δ. Κουτσαλέξης. | 1 |
| Σ. Φάραγκας. | 1 |
| Ἀ. Γλαράκης. | 1 |
| Χ. Α. Ῥουσσόπουλος. | 1 |
| Ἰ. Εὐςαθίου. | 1 |
| Ἰ. Δ. Σαριγιάννης. | 1 |
| Φεράλδης. | 1 |
| Δημ. Ν. Λέριος. | 2 |
| Ἰ. Γενναῖος. | 1 |
| Κ. Δακόπουλος. | 1 |
| Ἰ. Πετροκόκκινος. | 1 |
| Ε. Β. Βασιλειάδης. | 1 |
| Σ. Τσερτίδης. | 1 |
| Ἰ. Δρόσος. | 1 |
| Σ. Γενίσερλης Ἀνθυπολοχ. | 1 |
| Ν. Χατηριάδης Λοχ. | 1 |
| Κ. Ἀξελός. | 2 |
| Λακεδαιμόνιος Δανιήλ. | 2 |
| Χ. Παππαδάκης. | 2 |
| Ἰ. Κορνιοτόπουλος. | 2 |
| Ἰ. Ῥικάκης. | 2 |
| Διον. Κοσκινᾶς. | 1 |
| Γρηγ. Γόβαιος. | 1 |
| Ἀ. Πάνος. | 1 |
| Μ. Ἰ. Ἀναγνωςόπουλος. | 1 |
| Π. Ἄννινος. | 1 |
| Δ. Ζεύχαρης. | 1 |
| Θ. Κομνηνός. | 1 |
| Γ. Σκροῦφος. | 1 |

| | Σωμ. |
|---|---|
| Γ. Κρακίδα. | 1 |
| Κ. Ζεύχαρης. | 1 |
| Γ. Τερτσέτης. | 1 |
| Γ. Μομφεράτος. | 2 |
| Εὐ. Ῥάλλης. | 1 |
| Εὐ. Γεωργίου. | 1 |
| Δ. Γεωργίου. | 1 |
| Ἰ. Σωτηριάδης. | 2 |
| Χ. Ματακίδης. | 1 |
| Ἰωσὴφ Πιττακός. | 1 |
| Γ. Χρονιάδης. | 1 |
| Φ. Ἀγγελίδης. | 1 |
| Ν. Τσαλοκῶςας. | 1 |
| Ἀποςόλης Ἀργύρης. | 1 |
| Π. Ἀρτακιανός. | 1 |
| Π. Κορωναῖος. | 1 |
| Ν. Κ. Χασομοῦλης. | 1 |
| Γ. Ἰ. Παππαδόπουλος Σμυρναῖος. | 1 |
| Ἀ. Σκυλίτσης Χῖος. | 1 |
| Σ. Τρικούπης. | 1 |
| Μ. Γεωργαντᾶς. | 1 |
| Ἰ. Φωτεινός. | 1 |
| Εὐ. Πανταζῆς. | 1 |
| Μ. Τολμίδης. | 1 |
| Δ. Ν. Λεβίδης. | 1 |
| Κ. Βλάχος. | 1 |
| Γονατᾶς. | 1 |
| Ἰ. Παρίσης Λοχαγός. | 2 |
| Γ. Χρῆςος. | 1 |
| Ν. Μουράτης. | 1 |
| Β. Δραγών. | 1 |
| Ἰ. Εὐςαθίου. | 1 |
| Ἐμ. Συνετάκης. | 1 |
| Μ. Μέςρας. | 1 |
| Χ. Φαταούλας. | 1 |
| Π. Φιλιππίδης. | 1 |
| Ε. Σχινᾶς. | 1 |
| Θ. Δῆμας. | 1 |
| Μ. Γεωργαντᾶς. | 1 |
| Β. Σακουντσάκης. | 1 |
| Γ. Σοῦτσος. | 1 |
| Γ. Συναδινός. | 1 |
| Β. Α. Πετιμεζᾶς. | 1 |
| Δ. Ἰγγλέσης. | 1 |
| Ἀλκιβιάδης Ἀργυρόπουλος. | 2 |
| Μιχαὴλ Κανταχουζινός. | 1 |
| Δημήτριος Κανταχουζινός. | 1 |
| Ν. Πανταζόπουλος. | 1 |
| Δ Τριγγέτης. | 1 |
| Ἰ. Σῶκος. | 1 |
| Ν. Φλέγγας. | 2 |
| Φ. Δαμησύνας. | 1 |
| Β. Ἐλευθερίου. | 1 |
| Δ. Πονηρόπουλος. | 1 |
| Ἰ. Σκοῦφος. | 1 |
| Γ. Λαμαράκης. | 1 |
| Γ. Προῦσος. | 2 |
| Θ. Λεονάρδος. | 1 |
| Μ. Σοφιανός. | 1 |
| Σωνιέρος Ταγματάρχης. | 1 |
| Φ. Κωνςαντινίδης. | 1 |
| Κανέλος Δελιγιάννης. | 1 |
| Νικίας Οἰκονομόπουλος. | 1 |
| Χαρμόλαος. | 1 |

| | Σωμ. |
|---|---|
| Θ. Κυδωνάκης. | 1 |
| Κ. Ἀλεξίου. | 1 |
| Χ. Κυριακίδης. | 1 |
| Ν. Οἰκονομίδης. | 1 |
| Ἰ. Καγγελάρης. | 1 |
| Δ Παπαδιαμαντόπουλος. | 1 |
| Δ. Κορωναῖος. | 1 |
| Ε. Δανδρες. | 1 |
| Η. Βάβουλας. | 1 |
| Κ. Α. Ἰατρός. | 1 |
| Π. Περιέας. | 1 |
| Π. Ἰ. Κλαπόπουλος. | 1 |
| Η. Ἀσιμακόπουλος. | 1 |
| Χ. Παππασίμος. | 1 |
| Τσέρτος Γιανούσης. | 1 |
| Δ. Τσάτσος. | 1 |
| Π. Β. Παντελάκης. | 1 |
| Γ. Μαντσουράνης. | 1 |
| Ν. Γ. Ἰατρός. | 1 |
| Ἰ. Κακουλίδης. | 1 |
| Π. Α. Μπακόπουλος. | 1 |
| Σπύρος Παππαρήτωρ. | 2 |
| Δ. Γεωργίου. | 1 |
| Μεταξᾶς. | 1 |
| Πέτρος Μπούφης. | 1 |
| Θ. Φαρμακίδης. | 2 |
| Ἀρχιμ. Μ. Ἀποστολίδης. | 2 |
| Ἀνάργυρος Πετράκης. | 1 |
| Δ. Βότσαρης. | 1 |
| Ἰ. Καρπούνης. | 1 |
| Δ. Γεωργίου ἐκ Καστορίας Ἰατρός. | 1 |
| Β. Κατσουφός. | 1 |
| Ἀρτέμιος Ν. Μίχου. | 1 |
| Γ. Μοσχόπουλος. | 1 |
| Ἀνδ. Λουριώτης. | 2 |
| Ν. Ζαβιτσιάνος. | 1 |
| Θεοδώρητος Ἱερ. Κτενᾶς. | 1 |
| Χρῆστος Ἰατρίδης. | 1 |
| Δ. Γαλανοίδης. | 1 |
| Ἰ. Καςόρχης. | 1 |
| Κ. Πιτταχός. | 1 |
| Ζηνόβιος. | 1 |
| Δ. Σπηλιοτόπουλος. | 1 |
| Δ. Ἡσαΐας. | 1 |
| Ν. Ῥενιέρης. | 1 |
| Ἐπ. Βασιλείου. | 1 |
| Φ. Σολομών. | 1 |
| Ε. Ποῦλος. | 1 |
| Δ. Κεπρέκος. | 1 |
| Πολυμέρης Ἀνθυπολοχ. | 1 |
| Μ. Καρβοχορέσης. | 1 |
| Ν. Λαμπόπουλος. | 1 |
| Δ. Ταρσετόπουλος. | 1 |
| Κ. Ναούμ. | 1 |
| Α. Γ. Πίσσας. | 1 |
| Μαμμάκης. | 1 |
| Κ. Ε. Ἰωάννου. | 1 |
| Π. Βουρλιώτης. | 1 |
| Ν. Κονδύλης. | 1 |
| Α. Ῥόδιος Λοχαγός. | 1 |
| Δ. Ἀντίοχος. | 1 |
| Π. Καλαφάτης. | 1 |
| Γ. Γρηγοριάδης. | 1 |
| Ν. Κουζόγλους. | 1 |

| | Σωμ. |
|---|---|
| Χ. Σπυρίδων. | 1 |
| Ν. Τριτάκης. | 1 |
| Ἡ. Δημητρόπουλος. | 1 |
| Χ. Ἰ. Δούλης. | 1 |
| Γ. Α. Θερινός. | 1 |
| Ν. Καρτερός. | 1 |
| Σ. Κυδωνάκης. | 1 |
| Χ. Ν. Μελιγγός. | 1 |
| Δ. Παππανικολῆς. | 1 |
| Ποθητός Ξένος. | 1 |
| Γ. Λαμπρυνίδης. | 1 |
| Ἰ. Ξάνθης. | 1 |
| Λ. Π. Νίκος. | 1 |
| Β. Νικολαΐδης. | 1 |
| Ἀ. Γεωργαντᾶς. | 1 |
| Δ. Σκληςήρης. | 1 |
| Α. Σταϊκόπουλος. | 1 |
| Δ. Ἰασίδης. | 1 |
| Δ. Κορομηλᾶς. | 1 |
| Χ. Σαρδέλης. | 1 |
| Ν. Παλαμᾶς. | 1 |
| Σ. Ἄρτης. | 1 |
| Εὐ. Τομαρόπουλος. | 1 |
| Ἰ. Τουμπάζης. | 1 |
| Α. Ἀναγνώςου. | 1 |
| Ν. Μουσουδάκης. | 1 |
| Ἀλ. Καμπάνης. | 1 |
| Δ. Σ. Δελιγιάννης. | 1 |
| Ν. Κωνςαντίνου ἐξ Ἰωαννίνων. | 1 |
| Π. Ἐμ. Ξάνθου. | 1 |
| Θ. Ῥέντης. | 1 |
| Ν. Θ. Ἑρμῆς. | 1 |
| Σ. Φωτιᾶς. | 1 |
| Ν Ι. Νίκος. | 1 |
| Ἰ. Ζυμβρακάκης. | 1 |
| Α. Κονοφάος. | 1 |
| Ἰ. Ἀξελός. | 1 |
| Ν. Γ. Θεοχάρης. | 2 |
| Γ. Καλλιςράτης. | 1 |
| Ῥ. Καγιόπουλος. | 1 |
| Εὐφροσύνη Ῥαϊνέκ. | 1 |
| Γ. Ἰ. Γροπάρης. | 1 |
| Α. Μενδῶρος Ἰατρός. | 1 |
| Ν. Νικητόπουλος. | 1 |
| Ἰ. Γεωργιάδης. | 1 |
| Ἀρ. Βλάχος. | 1 |
| Ι. Καράπαυλος. | 1 |
| Μ. Ῥοδίτης Λογαγός. | 1 |
| Λεωνίδας Κοντόγλους. | 1 |
| Α. Γ. Παγκαλάκης. | 1 |
| Γ. Ἀθανασίου. | 1 |
| Γ. Χρυσίδης. | 1 |
| Ψύχας. | 2 |

## Παλαιῶν Πατρῶν.

| | Σωμ. |
|---|---|
| Π. Πατρινός. | 1 |
| Ν. Πράτζικας. | 1 |
| Γ. Κροίτσου. | 1 |
| Π. Παππαδιαμαντόπουλος. | 1 |
| Π. Χειλόπουλος. | 1 |
| Ἀν. Παππαδιαμαντόπουλος. | 1 |
| Α. Παππαβασιλόπουλος. | 1 |
| Ἀναγνώςης Ντζέτζος. | 1 |
| Ἀνδρέας Ἀγγελόπουλος. | 1 |
| Α. Γεωργακόπουλος. | 1 |
| Γ. Μαργαρίτης. | 1 |
| Θ. Μαντζαβίνου. | 1 |
| Εὐ. Ἠλιόπουλος. | 1 |
| Γ. Α. Κοντογούρης. | 1 |
| Σιδέρης Α. Παππαδόπουλος | 1 |
| Θεοδόσιος Τσηλιάνης. | 1 |
| Γ. Στροῦμπος. | 1 |
| Γ. Γεροκωςόπουλος. | 1 |
| Π. Ἰαννακόπουλος. | 1 |
| Θ. Ἰωάννου Τζη. | 1 |
| Γ. Δ. Κωςόπουλος. | 1 |

| | Σωμ. |
|---|---|
| Γ. Πράτσικας. | 1 |
| Γεώργιος Ἀθνασίου. | 1 |
| Ν. Χειλόπουλος. | 1 |
| Δ. Τσίπυρας. | 1 |
| Ἀνάργυρος Τσάννης. | 1 |
| Ἰ. Κασσιέρης. | 1 |
| Γ. Α. Γεωργόπουλος. | 1 |
| Εὐθύμιος Γουβέλλης. | 1 |
| Σπυρίδων Ῥαντόπουλος. | 1 |
| Νικόλαος Σπηλιοτόπουλος. | 1 |
| Γ. Κοντοναςασόπουλος. | 1 |
| Γ. Παππαγιαννόπουλος. | 1 |
| Παντελῆς Π. Ἀδαμίδης. | 1 |
| Π. Παρασκευαΐδης. | 1 |
| Κυριακὸς Φιλόπουλος. | 1 |
| Α. Σύψωμος. | 1 |
| Ἡ. Καλαμογδάρτης. | 2 |

## Ἀθηνῶν.

| | Σωμ. |
|---|---|
| Ἰ. Παππαρηγόπουλος. | 2 |
| Κ - - - | 3 |
| Ἀργ. - - | 2 |
| Βλαν. - - - | 1 |
| Δ. Σοῦτσος. | 1 |
| Η. Ῥήγας. | 1 |
| Γ. Ἀφθονίδης. | 2 |
| Κ. Γημαράκης. | 1 |
| Γ. Οἰκονομίδης. | 1 |
| Π. Μπενεδούστης. | 1 |
| Π. Ζωγράφος. | 1 |
| Σ. Ψωμᾶς. | 1 |
| Δεσπινοῦ Σούτσου. | 1 |
| Ἰ. Κλάδος. | 1 |
| Δ. Καλλιφρονᾶς. | 1 |
| Ἑλέγκω Βάσσου. | 1 |
| Ν. Μαραμπούτης. | 1 |
| Ν. Ἰωβανάκης. | 1 |
| Λουκᾶς Πύῤῥος. | 1 |
| Ἰωάννης Βλάχος. | 2 |
| Ν. Ζαγαρίτσας. | 2 |
| Κομπατῆς. | 1 |
| Α. Ν. Λεβίδης. | 1 |
| Ι. Κ. Δαμιανός. | 1 |
| Σ. Ἡσαΐας. | 1 |
| Κασσιέρης, Ἀνθυπολοχαγός. | 1 |
| Ν. Ἰω. | 1 |
| Ἰωάν. | 1 |

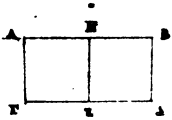
## Τριπόλεως.

| | Σωμ. |
|---|---|
| Α. Μοναρχίδης. | 1 |
| Ἀδὰμ Δοῦκας. | 1 |
| Γρ. Νικητάδης. | 1 |
| Γ. Κ. Χ. Κυριάκου. | 1 |
| Β. Θ. Δελιγιάννης. | 1 |
| Ἰ. Γ. Ἀςρινός. | 1 |
| Κ. Γ. Ἀντωνόπουλος. | 1 |
| Καλλίνικος Ἱερομ. ἐκ Βερβίτσης. | 2 |
| Σοφιανὸς Ἱερεὺς ἐκ Λαγγ. | 1 |
| Χ. Στασυνόπουλος ἐκ Βερβίτσης. | 1 |
| Μ. Γρηβόπουλος ἐκ Βερ. | 1 |
| Α. Ἀλεξανδρόπουλος ἐκ | 1 |
| Α. Πετρόπουλος ἐκ Λαγγ. | 1 |
| Π. Ἀρ | 1 |
| Π. Ἀσημακόπουλος ἐκ Λ. | 1 |
| Α. Ἰωάννου ἐκ Λ. | 1 |
| Σ. Θωμόπουλος ἐκ Λ. | 1 |
| Μ. Θωμόπ. Τσιλλιαδ. ἐκ Λ. | 1 |
| Π. Ζαφειρόπουλος ἐκ Λ. | 1 |
| Εὐ. Δελουλόπουλος ἐκ Λ. | 1 |
| Α. Χρονόπουλος ἐκ Λ. | 1 |

---

| | |
|---|---|
| Μανουὴλ Ἐφέσιος. | 10 |
| Λεωνίδας Πυργίδης. | 1 |
| Γρηγόριος Πυργίδης. | 1 |

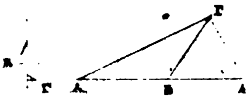
Σχ. 11.



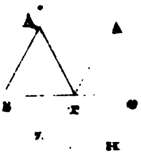
Σχ. 12.



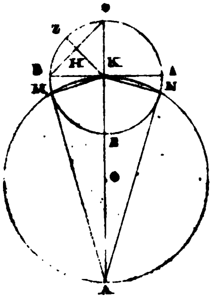
Σχ. 21.



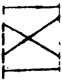
Σχ. 22.



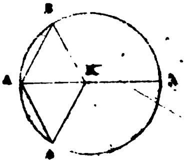
Σχ. 30.



χ. 25



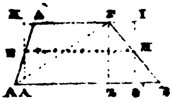
36



Σχ. 37

44.





Σχ. 14.

Bit. A. Forster